（京）新登字160号

北京师范大学现代数学丛书
独立于ZFC的数学问题
王世强　杨守廉 著
•
北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
北 京 朝 阳 三 环 印 刷 厂 印 刷

开本：850×1168 1/32 印张：9.125 字数：216千
1992年9月第1版　1992年9月第1次印刷
印数：1—1600

ISBN-303-01470-5/O·156
定价：10.00 元（平）
14.00 元（精）



序　言

本书是写给广大数学工作者看的，而不是专门写给数学基础或数理逻辑工作者的。但需要从公理集合论谈起。

自从1963年P.J.Cohen创立力迫法并在前人工作基础上证明了连续统假设的独立性以后，公理集合论的研究在近三十年来又有了长足的进展。特别是它的成果正在进入不少其他数学分支的领域，并且从根本上影响着这些领域中不少重要问题的答案。从而，公理集合论正日益更突出地显示着它在数学研究中的基础性意义和地位。

例如，可换群论中的Whitehead 问题，它的一个主要情况是问：是否每个基数为ω_1的W-群都是自由群？（W-群的概念不必在此详述，可参看第一章）这曾是群论学者多年未能解决的一个问题(例如，在L.Fuchs的重要专著《Infinite Abelian Groups》Vol.Ⅱ (1973) 中，有专门一节（§99）讨论它，并认为是十分困难的问题。）。在以前，虽然这一问题未能解决，但多数人都认为，它的答案，或者是肯定的，或者是否定的，只不过我们还不知道而已。直到1974年S.Shelah证明了这一问题相对于 ZFC 的独立性之后，人们才认识到，原来，由我们常用的集合论公理体系ZFC并不足以决定它的真假。只要ZFC自身不矛盾，那么，就可由之证明：既存在ZFC的模型，在其中Whitehead问题有肯定的答案；也存在ZFC的模型，在其中Whitehead问题有否定的答案。所以，如果不加用新的集合论假设、只用通常的集合论知识是不可能解决这一问题的。

象这种独立于ZFC的前沿性数学问题，不但在代数学中存

在，也在拓扑学及分析数学中存在（这里不去谈公理集合论本身所提出的大量问题）。例如关于Banach空间的Pelczynski猜想（见第九章），关于Banach代数的Kaplansky问题(见第十章)，集论拓扑学中的很多问题（第四至六章谈到了一部分），等等。它们都是由数学家们在现代数学研究中自然地提出的问题，而不象连续统假设（或其他很多已被证明其独立性的数学命题）那样显得似乎离现代数学工作者所直接关心的问题比较“远”。因而，对它们的不同答案也就会比连续统假设的成立与否等结果更进一步具体而明显地影响着数学工作者们所关心的其他有关问题的答案。

更形象地说，公理集合论的现代成果正在引起一些其他数学分支的“局部地震”，并且势将引起越来越多的“地震”。这正象数学史上非欧几何的出现一样，但其影响的深度及规模将更大。可以预料，今后会有越来越多的数学家将不得不去采纳一些新的集合论假设来帮助解决问题。

本书的目的就是要通过介绍这方面一些较新也较明显的例子，来引起数学工作者们对这一新发展形势的兴趣和关注。但本书并不要求读者具有公理集合论的专门知识。

本书在写法上力求各章独立，读者可以从感兴趣的任何一章开始阅读。由于各章基本独立，所以对数学符号的用法也并不强求全书统一，而主要是从在本章之内使用方便以及便于与其他符号相区别来决定。此外，也是为了便于读者单独阅读某一章或任意选读某几章，所以在写法上也并不回避个别常用概念或内容在书中很少量的重复，以便于各章基本上自给自足。

本书第四至六章为杨守廉同志撰写。附录是采用了何青同志的一篇文章。其余为王世强所写。

德国Heidelberg大学Gert H.Müller教授曾向我建议联合进行向数学界介绍数理逻辑成果的工作，这促使我加强了首先用中文

撰写本书的想法。胡世华先生和刘绍学先生也都支持本书的写作。我曾在讨论班上介绍过部分书稿，沈复兴、卢景波、沈恩绍、何青、陈练寒、张忠平、张玉平、王捍貧、田启家等同志提出了一些有益的意见。一并在此志谢。

希望本书能引起读者的兴趣和对数学中基础性研究的关心。书中难免有不少缺点或谬误之处，欢迎读者批评指正。

王世强

1990年8月

于北京师范大学



目　录



马丁公理简介

关于ZFC，可以看作通常的朴素集合论的公理化体系，它所反映的也就是广大数学工作者经常使用的集合论内容（较详细的介绍可参看附录.）。

关于各种形式的集合论新假设（或称新公理），我们一般在使用时随时介绍。但由于在很多章中都用到了马丁公理（Martin Axiom），为便于读者参看，我们在此介绍如下。

设（P，$\leqslant$）为一偏序集（又称部分有序集。在$\leqslant$已确定时，一般也简记为P.）。

设p，$q\in P$。如果存在$r\in P$能同时适合$r\leqslant p$及$r\leqslant q$，则称p和q是在P中**相容的**。

设$Q\subseteq P$。如果Q中任二不同元都在P中不相容，则称Q为P的一个**反链**。

如果P的任何反链Q都是至多可数的（即：Q为有限集或可数无限集），则称P适合**可数反链条件**，习惯上简称P适合c.c.c.（实际应简称为c.a.c.）。

设$D\subseteq P$。如果对任何$p\in P$，都存在$d\in D$能适合$d\leqslant p$，则称D为P的**稠密子集**。

设$F\subseteq P$。如果F适合下列二条件

（i）对任何$f,g\in F$，存在$h\in F$能同时适合$h\leqslant f$及$h\leqslant g$。

（ii）若$f\in F$，$p\in P$并且$f\leqslant p$，则$p\in F$。

则称F为P的一个**滤子**。

设κ为一基数，以MA(κ)记下列命题：对任何适合c.c.c.的偏序集P及P的任一族稠密子集Δ(即：Δ的元素都是P的稠密子

集）之适合$|\Delta|\leqslant\kappa$者（$|\Delta|$为Δ的基数），都存在P的滤子F（它与Δ有关）能适合：对每一$D\in\Delta$，$F\cap D\neq\phi$（ϕ代表空集）。

容易证明：MA(ω)成立而MA(2^ω)不成立。(其中ω为第1个无限基数，即$\aleph_0$。也可看作自然数集。）并且显见，如果MA(κ)成立而$\kappa'<\kappa$，则MA(κ')也成立。

马丁公理(简记为MA)是说：对一切$\kappa<2^\omega$，MA(κ)都成立。

本书中常以两种形式引用马丁公理。一种形式是MA(ω_1)（其中ω_1为ω之后的第1个基数，即$\aleph_1$）。由MA(ω_1)可以推出$\omega_1<2^\omega$，即连续统假设不成立。另一种引用形式是在MA之外再附加$\omega_1<2^\omega$，简记为MA＋¬CH。（由MA＋¬CH显然可以推出MA(ω_1)。）

可以证明：如果ZFC不矛盾，则ZFC＋MA＋¬CH也不矛盾（从而ZFC＋MA(ω_1)也不矛盾。）。

关于公理集合论及力迫法的详细介绍（并非阅读本书所需），有兴趣的读者可参看Th. Jech的《Set Theory》（Academic Press, 1978）或K. Kunen的《Set Theory》（North-Holland Publ. Co., 1980）等书。



第一章 Whitehead问题的独立性

Whitehead问题是指J.H.C.Whitehead在1952年提出的一个关于可换群的问题，最早见于文献记载是A.Ehrenfeucht的〔1〕。这个问题有一些不同的等价形式，它与代数、分析及拓扑中一些问题有关联，可参看〔2〕中的讨论。直到1974年之前，历经一些人的研究（有J.Rotman, R.J.Nunke, S.Chase、P.Griffith等），对Whitehead问题只得到部分结果，未能完全解决（参看〔2〕中所引文献）。1974年，S.Shelah证明了这一问题相对于ZFC的独立性（见〔3〕），才使人们对这一问题的本性有了更深刻的认识。

本章以下的介绍是根据〔4〕。由于我们的主旨在于证明这一问题的独立性，所以我们只取它的一种形式来详细论证，而不去讨论它的其他等价形式。

定义 设A、B为二可换群．π：$B\to A$是一个由B到A上的同态映射．如果存在由A到B内的同态映射ρ：$A\to B$能使$\pi\rho=1_A$（1_A为由A到A上的恒等映射），则称π为**分裂的**（to split）。

定义 一可换群A当适合下列条件时称为**W-群**：对任何可换群B及由B到A上的任何同态映射π：$B\to A$，如果π的核（kernel）与整数加群Z同构，则π是分裂的。

易知，凡自由可换群都是W-群，Whitehead问题是问：反之，若A是一W-群，A是否必为自由群？K.Stein〔5〕曾证明，凡可数的W-群都是自由群（见定理10）。但是当W-群A的元数不可数时，这个问题在通常的集合论公理ZFC之下没有确定的答案。

本章只讨论元数为ω_1的W-群，主要是证明以下两方面的结论：一方面是，如果对ZFC增加新公理$V=L$，则可以推出：每个元数为ω_1的W-群都是自由群（见定理16）。另一方面，如果对ZFC增加新公理$MA(\omega_1)$，则可以推出：存在元数为ω_1的W-群，它不是自由群（见定理23）。

对于元数$>\omega_1$的W-群，Shelah 也证明了类似的独立性结果。本章不再介绍。

在本章中，以下所说的群，无论提明或否，都是指可换群（用加法记号）。特以Z记整数加群。

§1 预备知识（一）

引理1 设B是可换群A的子群，并且B和A/B都是自由群。则A是自由群，并且B的任一基底都能扩张为A的基底。

证明 令π：$A\to A/B$为自然同态（即：对每个$a\in A$，令$\pi(a)=a+B$）。由A/B为自由群易知存在π的分裂同态ρ。现在先证明$A=\rho(A/B)\oplus B$。

首先，对任何$a\in A$，有$a=\rho\pi(a)+(a-\rho\pi(a))$，其中$\rho\pi(a)\in\rho(A/B)$而$a-\rho\pi(a)\in B$（后者是由于$\pi(a-\rho\pi(a))=\pi(a)-\pi\rho\pi(a)=\pi(a)-\pi(a)=0+B=B$）。其次，若有$x\in\rho(A/B)\cap B$，则存在$y\in A/B$使$x=\rho(y)$，从而$\pi(x)=\pi\rho(y)=y$。又由$x\in B$知$\pi(x)=B$，所以$y=B$为$A/B$的0元，从而$x=\rho(y)$为$A$的0元。由以上即知$A=\rho(A/B)\oplus B$。

任取B的一个基底X及A/B的一个基底Y（由题设知存在）。由ρ为1-1可知$\rho(Y)$是$\rho(A/B)$的基底，从而$\rho(Y)\cup X$是$A=\rho(A/B)\oplus B$的基底。所以A是自由群。 证毕

定义 设$\{A_\nu|\nu<\alpha\}$为一集合链

$$A_0\subseteq A_1\subseteq\cdots\subseteq A_\nu\subseteq\cdots\cdots,\ (\nu<\alpha).$$

如果对每个极限序数$\lambda<\alpha$都有$A_\lambda=\bigcup_{\nu<\lambda}A_\nu$，则称此链为**光滑链**。

如果此光滑链中每个 A_ν 都是可换群，并且A_ν是$A_{\nu+1}$的子群，则称此链为**光滑群链**。

定理2 设$\{A_\nu|\nu<\alpha\}$为一光滑群链，其中 A_0 是自由群，并且每个$A_{\nu+1}/A_\nu(\nu<\alpha)$也都是自由群。令 $A=\bigcup\limits_{\nu<\alpha}A_\nu$，则 A 是自由群，并且每个$A/A_\nu(\nu<\alpha)$也都是自由群。

证明 （1）设X_0是 A_0 的一个基底。以下将超限归纳地定义一个光滑集合链$\{X_\nu|\nu<\alpha\}$，使每个X_ν都是A_ν的基底。

设对于$\mu<\alpha$已经定义了符合要求的$\{X_\nu|\nu<\mu\}$。再对 μ 分二情况：

（1·1）若μ为极限序数，令 $X_\mu=\bigcup\limits_{\nu<\mu}X_\nu$。则 X_μ 是$\bigcup\limits_{\nu<\mu}A_\nu$的基底，并且由$\{A_\nu|\nu<\alpha\}$为光滑链可知$\bigcup\limits_{\nu<\mu}A_\nu=A_\mu$。

（1·2）若μ为后继序数$\delta+1$，则由题设知$A_{\delta+1}/A_\delta$是自由群，从而由引理1知可以把 X_δ扩张成$A_{\delta+1}$的一个基底 $X_{\delta+1}$。

（2）现在令$X=\bigcup\limits_{\nu<\alpha}X_\nu$，则由$A=\bigcup\limits_{\nu<\alpha}A_\nu$可知$X$是$A$的基底，所以$A$是自由群。又易知，对每个$\nu<\alpha$，$\{x+A_\nu|x\in X\setminus X_\nu\}$是$A/A_\nu$的一个基底，所以$A/A_\nu$也是自由群。　　证毕

定义 设A，C为可换群，以$\mathrm{Hom}(A, C)$记由A到C内的全体同态映射依自然方式定义加法所成的可换群。设A_1，A_2，C为可换群，σ：$A_1\to A_2$为由A_1到A_2内的同态映射。以

$$\sigma'\text{：}\mathrm{Hom}(A_2, C)\to\mathrm{Hom}(A_1, C)$$

记如下定义的同态映射：对任何$\varphi\in\mathrm{Hom}(A_2, C)$，令$\sigma'(\varphi)=\varphi\sigma\in\mathrm{Hom}(A_1, C)$。

定义 设A为一可换群，一个如下形状的可换群正合列

$$(*)\qquad 0\to F_1\xrightarrow{\delta}F_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0$$

其中F_0（从而F_1）为自由群者，称为A的一个**自由分解**（free resolution）（易见A的自由分解存在）。设A，C为可换群。任取A的一个自由分解$(*)$，以$\mathrm{Ext}(A, C)$记商群

$\mathrm{Hom}(F_1, C)/\mathrm{Im}\delta'$.（$\mathrm{Im}\delta'$为$\delta'$的象，$\delta'$依上一定义）

可以证明，这个定义与自由分解（*）的取法无关（参看〔6〕，p.35）。

定理3 对于可换群的任一正合列

$$0 \to A_1 \xrightarrow{\sigma_1} A_2 \xrightarrow{\sigma_2} A_3 \to 0$$

及任一可换群C，存在一正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(A_3, C) \xrightarrow{\sigma_2'} \mathrm{Hom}(A_2, C) \xrightarrow{\sigma_1'} \mathrm{Hom}(A_1, C)$$
$$\to \mathrm{Ext}(A_3, C) \to \mathrm{Ext}(A_2, C) \to \mathrm{Ext}(A_1, C) \to 0.$$

证明略去(参看〔6〕，p.41)。

定理4 一个可换群A为W-群的充分必要条件是$\mathrm{Ext}(A,Z)=0$。

证明 （1）设A为W群。任取A的一个自由分解(*)。现在证明

$$\delta': \mathrm{Hom}(F_0, Z) \to \mathrm{Hom}(F_1, Z)$$

是到上的。任取$\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(F_1, Z)$，令$B=(Z \oplus F_0)/I$，其中$I=\{(\varphi_1(y), -\delta(y)) \mid y \in F_1\}$。则有可换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & F_1 & \xrightarrow{\delta} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & \\
0 \to & Z & \xrightarrow{\lambda} & B & \xrightarrow{\pi} & A & \to 0
\end{array}$$

其中λ，θ，π的定义各为：$\lambda(n)=(n, 0)+I$；$\theta(x)=(0, x)+I$；$\pi((n, x)+I)=\varepsilon(x)$。此时易见图中的第二列也是正合列。

由图中第二列及A为W群可知，存在同态映射ρ：$A \to B$能使$\pi\rho=1_A$。

对任何$b \in B$，令$\tau_1(b)=b-\rho\pi(b)$，则有

$$\pi(\tau_1(b))=\pi(b)-\pi\rho\pi(b)=\pi(b)-\pi(b)=0,$$

所以$\tau_1(b) \in \mathrm{Ker}(\pi)$。并且易见$\tau_1$：$B \to \mathrm{Ker}(\pi)$是同态映射。

又由上图可知$Z=\lambda^{-1}(\mathrm{Ker}(\pi))$。现在定义$\tau$：$B \to Z$为$\tau=\lambda^{-1}\tau_1$，则有$\tau\lambda=1_Z$（因：对任何$n \in Z$，$\tau\lambda(n)=\lambda^{-1}\tau_1\lambda(n)=$

$\lambda^{-1}(\lambda(n)-\rho\pi\lambda(n))=n-\lambda^{-1}\rho\pi\lambda(n)=n-\lambda^{-1}\rho(0)=n$.)。

现在令 $\varphi_0=\tau\theta$，则有 $\delta'(\varphi_0)=\varphi_1$（因：对任何 $y\in F_1$，$\delta'(\varphi_0)(y)=\varphi_0\delta(y)=\tau\theta\delta(y)=\tau\lambda\varphi_1(y)=1_Z\varphi_1(y)=\varphi_1(y)$.)。所以$\delta'$是到上的。从而 $\mathrm{Im}\delta'=\mathrm{Hom}(F_1, Z)$，$\mathrm{Ext}(A, Z)=0$。

（2）反之，设 $\mathrm{Ext}(A, Z)=0$。我们证明，对任何如下的正合列

$$(\alpha)\qquad 0\to Z\xrightarrow{\lambda}B\xrightarrow{\pi}A\to 0$$

其中的π都是分裂的(从而即知A是W-群.)。

（2·1）取A的一个自由分解（*）使由其中的自由群F_0到B上有一同态映射θ适合$\pi\theta=\varepsilon$(易知这样的F_0及θ存在.)。

此时，易见存在同态映射φ_1：$F_1\to Z$ 能构成如（1）中的可换图。

由$\mathrm{Ext}(A, Z)=0$可知δ'是到上的。所以存在φ_0：$F_0\to Z$能使$\delta'(\varphi_0)=\varphi_1$，也即$\varphi_0\delta=\varphi_1$。

现在证明，若$x\in\mathrm{Ker}(\theta)$，则$\varphi_0(x)=0$。由$x\in\mathrm{Ker}(\theta)$可知$\varepsilon(x)=\pi\theta(x)=0$，故由正合性知存在$y\in F_1$能使$\delta(y)=x$，从而$\varphi_0(x)=\varphi_0\delta(y)=\varphi_1(y)=0$（最后一等号是由于$\lambda\varphi_1(y)=\theta\delta(y)=\theta(x)=0$以及$\lambda$的1-1性.）。

根据上段，由φ_0能导出一个由B到Z的同态映射τ如下：对每个$b\in B$，任取$x\in F_0$使$\theta(x)=b$（由θ为到上知x存在），令$\tau(b)=\varphi_0(x)$即可(由上段易知$\tau(b)$与x的取法无关.)。

现在证明$\tau\lambda=1_Z$。对任何$n\in Z$，取$x\in F_0$使$\theta(x)=\lambda(n)$，则由上段知$\tau\lambda(n)=\varphi_0(x)$。又有$\varepsilon(x)=\pi\theta(x)=\pi\lambda(n)=0$（最后一等号是由正合性），再由正合性知存在$y\in F_1$能使$\delta(y)=x$，从而$\varphi_0(x)=\varphi_0\delta(y)=\varphi_1(y)$。此外，$\lambda\varphi_1(y)=\theta\delta(y)=\theta(x)=\lambda(n)$，再由$\lambda$的1-1性有$\varphi_1(y)=n$。综上所述即有$\tau\lambda(n)=n$。

（2·2）现在证明π是分裂的。

设$a\in A$。任取$b\in B$使$\pi(b)=a$(由正合性知b存在.)。令

$\rho(a)=b-\lambda\tau(b)$.

先证明，$\rho(a)$与b的取法无关．设又有$b_1\in B$使$\pi(b_1)=a$．由$\tau\lambda=1_Z$易知$b-\lambda\tau(b)$，$b_1-\lambda\tau(b_1)\in \mathrm{Ker}(\tau)$．又由正合性有$\pi(\lambda\tau(b))=0$及$\pi(\lambda\tau(b_1))=0$，从而

$$\pi(b-\lambda\tau(b))=\pi(b)=a=\pi(b_1)=\pi(b_1-\lambda\tau(b_1)),$$

所以 $$(b-\lambda\tau(b))-(b_1-\lambda\tau(b_1))\in \mathrm{Ker}(\pi)=\mathrm{Im}(\lambda),$$

从而存在$n\in Z$能使$\lambda(n)=(b-\lambda\tau(b))-(b_1-\lambda\tau(b_1))$，由此知

$$\begin{aligned} n&=\tau\lambda(n)=\tau(b-\lambda\tau(b))-\tau(b_1-\lambda\tau(b_1)) \\ &=\tau(b)-\tau(b)+\tau(b_1)-\tau(b_1)=0, \end{aligned}$$

从而$\lambda(n)=0$，所以$b-\lambda\tau(b)=b_1-\lambda\tau(b_1)$．

易证ρ是由A到B内的同态映射．并且由以上计算可知对每个$a\in A$都有$\pi\rho(a)=a$．所以$\pi\rho=1_A$，π是分裂的．

再由正合列（α）的任意性即知A是W-群． 证毕

定理5 W-群的子群仍为W-群．

证明 设A_2为一W-群，A_1为A_2的子群，则有正合列

$$0\to A_1\xrightarrow{\sigma_1}A_2\xrightarrow{\sigma_2}A_2/A_1\to 0,$$

其中σ_1是包入（inclusion）映射．由定理3知有正合列

$$\mathrm{Ext}(A_2,\ Z)\to \mathrm{Ext}(A_1,\ Z)\to 0.$$

但由A_2为W-群及定理4知$\mathrm{Ext}(A_2,\ Z)=0$，从而由正合性知也有$\mathrm{Ext}(A_1,\ Z)=0$，再由定理4即知A_1为W-群． 证毕

定理6 每一W-群A都是无扭的．

证明 假若不然，则易见A含有非$\{0\}$的有限循环子群$\langle a\rangle$．再由定理5知$\langle a\rangle$应为W-群．

另一方面，考虑由$1\to a$生成的由Z到$\langle a\rangle$上的同态映射π．由$\langle a\rangle$有限可知π的核同构于Z，并且由$\langle a\rangle\neq\{0\}$易见不存在$\pi$的分裂同态$\rho$：$\langle a\rangle\to Z$．所以$\langle a\rangle$不是$W$-群，与上矛盾． 证毕

定理7 设B_1为一W-群，B_0为B_1的子群且B_1/B_0不为W-群．此时，存在同态映射ϕ：$B_0\to Z$，它不能扩张为由B_1到Z的同态

映射。

证明 考虑正合列

$$0 \to B_0 \xrightarrow{\lambda} B_1 \to B_1/B_0 \to 0,$$

其中 λ 为包入映射。由定理 3 知存在正合列

$$\mathrm{Hom}(B_1, Z) \xrightarrow{\lambda'} \mathrm{Hom}(B_0, Z) \to \mathrm{Ext}(B_1/B_0, Z) \to \mathrm{Ext}(B_1, Z).$$

由题设及定理 4 知 $\mathrm{Ext}(B_1, Z)=0$ 而 $\mathrm{Ext}(B_1/B_0, Z)\neq 0$。故由正合性易知$\lambda'$不能是到上的。

所以，存在$\phi\in\mathrm{Hom}(B_0, Z)$能使：对任何 $\rho\in\mathrm{Hom}(B_1, Z)$ 都有$\phi\neq\lambda'(\rho)=\rho\lambda$。由于$\lambda$是包入映射，此式即说明$\phi$不能扩张为$\rho$。 证毕

§2 可数的W-群

本节主要证明：每个可数的W-群都是自由群（见定理10），这个事实不但自身有意义，并且本节所用的证法对以后有参考作用。

定义 设A为一无扭（torsion-free）可换群，B为A的子群。若A/B也是无扭的，则称B为A的纯（pure）子群（注意，当A不为无扭时，其纯子群的通常定义与此说法不同。）。

定理8 设A为一可数的无扭可换群。如果A的每个有限生成的子群都能被包括在A的一个有限生成的纯子群中，则A是自由群。

证明 把A的元素列出为

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\ (n<\omega).$$

现在对$n<\omega$归纳地定义一个递增的有限生成纯子群链$\{B_n|\ n<\omega\}$如下：令$B_0=\{0\}$。设B_n已经定义，令C为由$B_n\cup\{a_n\}$生成的子群，则由题设知A中存在包括C的有限生成纯子群，任取其一作为B_{n+1}即可。

对每个$n<\omega$，考虑B_{n+1}/B_n。由B_{n+1}为有限生成可知B_{n+1}/B_n也如此。又由B_n为A的纯子群知B_{n+1}/B_n是无扭的。故由可换群基本定理可知B_{n+1}/B_n是自由群。

显见$A=\bigcup_{n<\omega}B_n$。再由B_0及每个B_{n+1}/B_n均为自由群及定理2即知A是自由群。 证毕

以下将讨论一些形如$B\times Z$的群或集合C（其中Z仍为整数加群），此时以π记由C到B上的射影，即：对任何$(b, n)\in C=B\times Z$，令$\pi(b, n)=b$。

定义 设B为一可换群。适合下列条件的可换群C称为(B, Z)-群：

（Ⅰ）C的元素集为$B\times Z$。

（Ⅱ）由C到B上的射影π为同态映射。

（Ⅲ）对任何$n, m\in Z$：$(0, n)+(0, m)=(0, n+m)$

（当B给定后，(B, Z)-群可有多种。）

引理9 设B_1是一个W-群，B_0是B_1的子群且B_1/B_0不是W-群。又设C_0是一个(B_0, Z)-群，并且射影π：$C_0\to B_0$有一个分裂同态ρ：$B_0\to C_0$。则存在一个无扭的(B_1, Z)-群C_1，它是C_0的扩张，但是ρ不能扩张为射影π：$C_1\to B_1$的分裂同态。

证明 （1）先考虑一个特殊情况，即：$C_0=B_0\oplus Z$并且$\rho(b)=(b, 0)$（对一切$b\in B_0$）。

（1·1）令$\bar{C}_1=B_1\oplus Z$，并取同态映射ϕ：$B_0\to Z$使它不能扩张为由B_1到Z的同态映射（由定理7知ϕ存在）。

定义γ：$C_0\to\bar{C}_1$为$\gamma(b, n)=(b, n+\phi(b))$。

假若存在$\bar{\rho}_1$：$B_1\to\bar{C}_1$是π：$\bar{C}_1\to B_1$的分裂同态，并且$\bar{\rho}_1|B_0=\gamma\rho$。此时，令$\varphi=\pi'\bar{\rho}_1$：$B_1\to Z$（此处$\pi'$为到第二分量的射影，即$\pi'(b, n)=n$）。则对任何$b\in B_0$都有

$$\varphi(b)=\pi'\bar{\rho}_1(b)=\pi'\gamma\rho(b)=\pi'\gamma(b, 0)=\pi'(b, \phi(b))=\phi(b).$$

这样，φ就成为ϕ的扩张，与ϕ的取法不合。所以，没有如上的

$\bar{\rho}_1$存在。

(1·2) 如果γ是由C_0到$\bar{C}_1$内的包入映射，则上面的$\bar{\rho}_1|B_0=\gamma\rho$成为$\bar{\rho}_1|B_0=\rho$。从而，可以取$C_1=\bar{C}_1$而上段所断言的$\bar{\rho}_1$不存在就已经是本引理的结论。但事实上$\gamma$并不是包入映射，所以需要再对$\bar{C}_1$作如下的改变：

定义一个由集合$\bar{C}_1$到集合$B_1\times Z$的映射f如下：

$$f(b,\ n)=\begin{cases}(b,\ n), & \text{当 } b\notin B_0;\\ (b,\ n-\phi(b)), & \text{当 } b\in B_0.\end{cases}$$

易见f是一个到上的1-1映射。现在在集合$B_1\times Z$上定义加法如下：对任何u，$v\in B_1\times Z$，令

$$u+v=f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)).$$

则易见得到一个$(B_1,\ Z)$-群C_1，并且f：$\bar{C}_1\to C_1$成为同构映射。

这时，易见$\gamma_1=f\gamma$：$C_0\to C_1$是包入映射。再仿（1·1）进行论证（以C_1，γ_1分别代替$\bar{C}_1$，γ），即知C_1适合引理的结论（注意由定理6知B_1无扭，再由$\bar{C}_1$定义可知C_1无扭.）。

（2）现在考虑一般情况的$(B_0,\ Z)$-群C_0及π：$C_0\to B_0$的分裂同态ρ。

利用ρ定义τ：$B_0\oplus Z\to C_0$为$\tau(b,\ n)=\rho(b)+(0,\ n)$，则易见$\tau$为一同构映射。

再令$\rho_1=\tau^{-1}\rho$：$B_0\to B_0\oplus Z$，则易见ρ_1是π：$B_0\oplus Z\to B_0$的分裂同态，并且，对一切$b\in B_0$，有$\rho_1(b)=\tau^{-1}\rho(b)=\tau^{-1}\tau(b,\ 0)=(b,\ 0)$。

对于$B_0\oplus Z$及ρ_1，可引用（1）得一个无扭的(B_1,Z)-群C_1'，它是$B_0\oplus Z$的扩张，但ρ_1不能扩张为射影π：$C_1'\to B_1$的分裂同态。

把C_1'的子群$B_0\oplus Z$依照τ改换为C_0，可得一个与C_1'同构的无扭群C_1，易见它仍是$(B_1,\ Z)$-群。并且易知ρ不能扩张为射影π：$C_1\to B_1$的分裂同态。

证毕

定理10 每个可数的W-数都是自由群。

证明 （1）设A为一可数的W-群．由定理6知A是无扭的．以下证明，A的每一个有限生成的子群都能被包括在A的一个有限生成的纯子群中，从而由定理8即知A是自由群．

（2）假若不然，则存在A的有限生成的子群B_0，它不被包括在A的任何有限生成的纯子群中．

令$B=\{a\in A|$存在整数$n\neq 0$使$na\in B_0\}$．显见$B_0\subseteq B$，并且易知B是A的纯子群（事实上，B是无扭群A中包括B_0的最小纯子群，称为B_0在A中的**纯闭包**．以下还将用到．）．所以B不能是有限生成的．从而可知（注意A为可数）存在一个严格递增的有限生成子群链

$$B_0\subset B_1\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots,\ (n<\omega)$$

能使$B=\bigcup\limits_{n<\omega}B_n$．

（3）以下将归纳地定义一个严格递增的加群链

$$C_0\subset C_1\subset\cdots\subset C_n\subset\cdots,\ (n<\omega)$$

使其中每个C_n都是无扭的(B_n, Z)-群，从而其并$C=\bigcup\limits_{n<\omega}C_n$是一个无扭的$(B, Z)$-群．以下对诸$C_n$的定义还能使射影$\pi$：$C\to B$不是分裂的，从而$B$不是$W$-群，与定理5矛盾．

（4）任意取定B_0的有限个生成元，构成集合S．先证明：对任一无扭可换群D及任一同态ρ：$B\to D$，ρ可以由它在S上的值完全确定．事实上，对任何$b\in B$，存在$n\neq 0$使$nb\in B_0$，从而易见$\rho(nb)$由ρ在S上的值完全确定．再由$n\rho(b)=\rho(nb)$及D为无扭群即知$\rho(b)$也被完全确定．

（5）由有限集S到集$S\times Z$内的映射g：$S\to S\times Z$只有可数多个，从而其中能适合$\pi g=1_S$的也只有可数多个（此处π为由$S\times Z$到S上的射影）．把这样的g（易见有无限多个）列举为：

$$g_0,\ g_1,\ \cdots,\ g_n,\ \cdots\ (n<\omega).$$

现在归纳地定义诸C_n．

令$C_0=B_0\oplus Z$．

设(B_n, Z)-群C_n已经定义。再分两种情况定义C_{n+1}。

（Ⅰ）若g_n能扩张为射影$\pi: C_n \to B_n$的分裂同态$\rho: B_n \to C_n$。并注意由B的定义及$B_0 \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq B$易知$B_{n+1}/B_n$中的元周期都有限，从而由定理6知$B_{n+1}/B_n$不是$W$-群。所以此时可以对$B_n$及$B_{n+1}$应用引理9（把$B_n$，$B_{n+1}$各视为该引理中的$B_0$，$B_1$），从而得到一个无扭的$(B_{n+1}, Z)$-群$C_{n+1}$，它是$C_n$的扩群，但$\rho$不能扩张为射影$\pi$：$C_{n+1} \to B_{n+1}$的分裂同态。

（Ⅱ）若g_n不能扩张为射影π：$C_n \to B_n$的分裂同态。则任取π的一个分裂同态ρ：$B_n \to C_n$并仿（Ⅰ）定义C_{n+1}(由于B_n是有限生成的无扭可换群，故易知是自由群，从而易见ρ存在。)。

（6）令$C = \bigcup_{n<\omega} C_n$。现在证明$\pi$：$C \to B$不是分裂的。

假若存在π的分裂同态ρ_1：$B \to C$。则$\rho_1|S$适合$\pi(\rho_1|S) = 1_S$，从而$\rho_1|S$是某一g_n。对于此n，$\rho_1|S$的扩张。$\rho_1|B_n$是π：$C_n \to B_n$的分裂同态。所以此g_n属于（5）中（Ⅰ）的情况，从而由（Ⅰ）中C_{n+1}的取法知$\rho_1|B_n$不能扩张为π：$C_{n+1} \to B_{n+1}$的分裂同态。但由ρ_1的取法显见（$\rho_1|B_n$的扩张）$\rho_1|B_{n+1}$是此π的分裂同态。故得矛盾。

（7）综上所述，可知（2）中的“假若不然”不能成立。故由（1）知A是自由群。　　　　证毕

§3　预备知识（二）

定义　设A为一可换群。如果A的每一可数子群都是自由的，则称A为**ω_1-自由的**。设可换群A为ω_1-自由的，B为A的子群。如果A/B是ω_1-自由的，则称B为A的**ω_1-纯子群**。

定义　一个可换群A当适合下列性质时，称为**适合Chase条件**：

（C）　A是ω_1-自由的，并且A的每个可数子群都被包括在A

的一个可数的ω_1-纯子群中.

引理11 设可换群A的基数为ω_1,则A适合Chase条件(C)的充分必要条件是：A是一个严格递增的光滑可数自由子群链$\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$的并，其中$A_0=\{0\}$并且每个$A_{\nu+1}$都是A的ω_1-纯子群.

证明 (1) 设A适合(C). 把A的元素排为一个长为ω_1的序列：

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\nu,\ \cdots\ (\nu<\omega_1).$$

现在对$\nu<\omega_1$超限归纳地定义A_ν如下：

令$A_0=\{0\}$.

设对一切$\mu<\nu$都已定义了可数自由子群A_μ，使$\{A_\mu|\mu<\nu\}$是一个光滑链，并且对每个后继序数$\mu<\nu$，A_μ都是A的ω_1-纯子群. 以下分二情况定义A_ν：

(Ⅰ) 若ν是极限序数，令$A_\nu=\bigcup_{\mu<\nu}A_\mu$.

(Ⅱ) 若ν是后继序数$\mu+1$. 任取一元$b_\mu\in A\setminus A_\mu$，令$B$为由$A_\mu\cup\{a_\mu,\ b_\mu\}$生成的子群（易见$B$可数），再任取一个包括$B$的可数$\omega_1$-纯子群（由$(C)$知存在）作为$A_\nu$即可.

A_ν的归纳定义至此完成. 显见$A=\bigcup_{\nu<\omega_1}A_\nu$.

(2) 反之，设A是一个光滑的可数自由子群链$\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$的并，其中每个$A_{\nu+1}$都是A的ω_1-纯子群. 现在证明A适合(C).

任取A的一个可数子群B. 由ω_1的正则性易见存在$\nu+1<\omega_1$能使$B\subseteq A_{\nu+1}$. 但$A_{\nu+1}$是自由群，从而其子群B也是自由群. 并且$A_{\nu+1}$又是A的ω_1-纯子群. 所以A适合(C). 证毕

定义 设f是由ω_1到ω_1内的函数，当适合下列二条件时，称f为**正规**(normal)的：

(Ⅰ) f严格递增. 即，若$\mu<\nu<\omega_1$，则$f(\mu)<f(\nu)$.

(Ⅱ) f是连续的. 即，对每一极限序数$\lambda<\omega_1$都有$f(\lambda)=$

$\sup\{f(\nu)|\nu<\lambda\}$。

定义 设$S\subseteq\omega_1$，如果每一正规函数的象集与S的交集都不空，则称S为ω_1的**平稳**（stationary）子集。

定理12 设可换群A的基数为ω_1，并且A是一个光滑的可数自由子群链$\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$的并，其中$A_0=\{0\}$并且每个$A_{\nu+1}$都是A的ω_1-纯子群．令

$$E=\{\lambda<\omega_1|A_\lambda\text{不是}A\text{的}\omega_1\text{-纯子群}\},$$

则A为自由群的充分必要条件是：E不是ω_1的平稳子集。

证明 （1）设E是不ω_1的平稳子集．则存在一个正规函数f：$\omega_1\to\omega_1$使其象集不与E相交。

对每个$\nu<\omega_1$，令$\overline{A}_\nu=A_{f(\nu)}$。

易知f为一无界连续函数，从而可知$A=\bigcup\limits_{\nu<\omega_1}\overline{A}_\nu$，并且$\{\overline{A}_\nu|\nu<\omega_1\}$是光滑的（$A=\bigcup\limits_{\nu<\omega_1}\overline{A}_\nu$由$f$的无界性易见．$\{\overline{A}_\nu|\nu<\omega_1\}$的光滑性是由于$f$的连续性，因：对每个极限序数$\lambda<\omega_1$，由$f(\lambda)=\sup\{f(\nu)|\nu<\lambda\}$可得$\overline{A}_\lambda=A_{f(\lambda)}=\bigcup\limits_{\nu<\lambda}A_{f(\nu)}=\bigcup\limits_{\nu<\lambda}\overline{A}_\nu$.）。

由于f的象集不与E相交，故由E的定义可知每个$\overline{A}_\nu$（$\nu<\omega_1$）都是A的ω_1-纯子群．再由后者的定义易知每个$\overline{A}_{\nu+1}/\overline{A}_\nu$（$\nu<\omega_1$）都是自由群。

由以上所述及定理2（注意由题设知$\overline{A}_0=A_{f(0)}$是自由群）即知A是自由群。

（2）反之，设A为自由群。取A的一个基底X。

（2·1）先超限归纳地定义一个光滑的集合链$\{X_\nu|\nu<\omega_1\}$（其中每$X_\nu\subseteq X$）及一个正规函数f：$\omega_1\to\omega_1$使：每个X_ν是$A_{f(\nu)}$的基底。

令$X_0=\phi$，$f(0)=0$。

设对某个$\nu<\omega_1$，已经对一切$\mu<\nu$定义了符合条件的X_μ及$f(\mu)$。再对ν分二情况：

（Ⅰ）若ν为一极限序数．令$X_\nu=\bigcup_{\mu<\nu}X_\mu$，$f(\nu)=\sup\{f(\mu)|\mu<\nu\}$．此时，有$A_{f(\nu)}=\bigcup_{\mu<\nu}A_{f(\mu)}$，故知$X_\nu$是$A_{f(\nu)}$的基底．

（Ⅱ）若$\nu=\mu+1$．任取X的一个真包括X_μ的可数子集Y_0，并令$\sigma_0<\omega_1$为一个能使$Y_0\subseteq A_{\sigma_0}$的序数（易知$\sigma_0$存在）．再取$X$的一个可数子集$Y_1$使$A_{\sigma_0}\subseteq\langle Y_1\rangle$（$\langle Y_1\rangle$表示由$Y_1$生成的子群），再取$\sigma_0\leqslant\sigma_1<\omega_1$使$Y_1\subseteq A_{\sigma_1}$，如此继续，可得$X$的一个可数子集链

$$X_\mu\subset Y_0\subseteq Y_1\subseteq\cdots\subseteq Y_n\subseteq\cdots\cdots,\ (n<\omega,\ 每个Y_n\subseteq X)$$

及一个序数链

$$f(\mu)<\sigma_0\leqslant\sigma_1\leqslant\cdots\leqslant\sigma_n\leqslant\cdots\cdots,\ (n<\omega,\ 每个\sigma_n<\omega_1)$$

能使对每个$n<\omega$都有$Y_n\subseteq A_{\sigma_n}\subseteq\langle Y_{n+1}\rangle$．

现在令$X_\nu=\bigcup_{n<\omega}Y_n$，$f(\nu)=\sup\{\sigma_n|n<\omega\}$（由诸$\sigma_n<\omega_1$及$\omega_1$的正则性知$f(\nu)<\omega_1$．）．则易知$X_\nu$是$A_{f(\nu)}$的基底．

（2.2）现在证明，E不是ω_1的平稳子集．

对任何$\nu<\omega_1$，由（2.1）可知$A/A_{f(\nu)}$同构于由$X\setminus X_\nu$生成的自由群，所以$A_{f(\nu)}$是A的ω_1-纯子群．从而有$f(\nu)\notin E$．

但由（2.1）易见f：$\omega_1\to\omega_1$是一个正规函数．所以E不是ω_1的平稳子集．　　　　证毕

§4　在$V=L$下Whitehead问题的肯定答案

对于已知与ZFC相对和谐的集合论公理$V=L$，我们不在此介绍．本节要用到的是它的下列推论．

定理13　在$V=L$之下．设$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$是一个光滑的严格递增集合链，$C=\bigcup_{\nu<\omega_1}C_\nu$，并设$E$是$\omega_1$的一个平稳子集．则存在集合族$\{S_\nu|\nu\in E\}$适合下列二性质：

（Ⅰ）对每个$\nu\in E$，$S_\nu\subseteq C_\nu$．

（Ⅱ）对任何$X\subseteq C$，$\{\mu\in E|X\cap C_\mu=S_\mu\}$都是$\omega_1$的平稳

子集。

定理13的证明略去(参看〔7〕).我们也可以把它自身(去掉"在$V=L$之下"的字样后)看作一条与ZFC相对和谐的集合论公理.

推论14 在$V=L$之下，设$\{B_\nu|\nu<\omega_1\}$是一个光滑的严格递增集合链，$B=\bigcup_{\nu<\omega_1}B_\nu$，并设$E$是$\omega_1$的一个平稳子集，$Y$是任一可数集. 则存在函数族$\{g_\nu:B_\nu\to B_\nu\times Y|\nu\in E\}$具有下列性质：

对每一函数$h:B\to B\times Y$之适合$h(B_\nu)\subseteq B_\nu\times Y$(对一切$\nu\in E$)者，都存在一$\mu\in E$能使$(h|B_\mu)=g_\mu$. ($(h|B_\mu)$表示$h$在$B_\mu$上的局限.).

证明 令$C_\nu=B_\nu\times(B_\nu\times Y)(\nu<\omega_1)$，$C=B\times(B\times Y)$. 则易见$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$为光滑的严格递增集合链且$C=\bigcup_{\nu<\omega_1}C_\nu$. 故知存在集合族$\{S_\nu|\nu\in E\}$具有定理13中所说的性质(注意$S_\nu\subseteq B_\nu\times(B_\nu\times Y)$).现在定义函数族$\{g_\nu|\nu\in E\}$如下：

$$\begin{cases}\text{若}S_\nu\text{是由}B_\nu\text{到}B_\nu\times Y\text{的函数，则令}g_\nu=S_\nu;\\ \text{否则令}g_\nu\text{为由}B_\nu\text{到}B_\nu\times Y\text{的任一函数.}\end{cases}$$

任取一函数$h:B\to B\times Y$之适合$h(B_\nu)\subseteq B_\nu\times Y$(对一切$\nu\in E$)者. 可视$h$为$B\times(B\times Y)$的子集. 由定理13中$\{S_\nu|\nu\in E\}$的性质(Ⅱ)知存在一$\mu\in E$(事实上是存在一个平稳集这样的$\mu$)适合$h\cap C_\mu=S_\mu$. 又由所设的$h(B_\mu)\subseteq B_\mu\times Y$知$(h|B_\mu)\subseteq C_\mu$，从而易见$(h|B_\mu)=h\cap C_\mu=S_\mu$，再由$g_\mu$定义即知$(g|B_\mu)=g_\mu$. 证毕

定理15 在$V=L$之下，设$\{B_\nu|\nu<\omega_1\}$是一个光滑的严格递增可数自由可换群链，并且$E=\{\nu<\omega_1|B_{\nu+1}/B_\nu\text{不是自由的}\}$是$\omega_1$的平稳子集.令$B=\bigcup_{\nu<\omega_1}B_\nu$，则$B$不是$W$-群.

证明 (1) 类似定理10的证明，以下将根据群链$\{B_\nu|\nu<\omega_1\}$超限归纳地定义一个光滑的严格递增的群链$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$，使其中每个C_ν都是(B_ν,Z)-群，而使其并$C=\bigcup_{\nu<\omega_1}C_\nu$是一个$(B,Z)$

-群且能使射影$\pi: C\to B$不分裂。从而即知B不是W-群。

（2）首先，由推论14可知，存在函数族$\{g_\nu: B_\nu\to B_\nu\times Z|\nu\in E\}$能使：对每一函数$h: B\to B\times Z$之适合$\pi h=1_B$者（注意由此易知对每一$\nu\in E$都有$h(B_\nu)\subseteq B_\nu\times Z$），都存在一个$\mu\in E$能使$h|B_\mu=g_\mu$。

（3）现在定义诸C_ν。

令C_0为任一(B_0,Z)-群。

设对一切$\mu<\nu$已经定义了符合条件的诸C_μ。

若ν为极限序数，令$C_\nu=\bigcup_{\mu<\nu}C_\mu$。

若ν为后继序数$\mu+1$，再分二情况：

（3·1）若$\mu\in E$并且$g_\mu: B_\mu\to B_\mu\times Z$是$\pi: C_\mu\to B_\mu$的分裂同态。注意由$\mu\in E$知$B_{\mu+1}/B_\mu$不是自由的，故由定理10知其不为$W$-群。所以此时可以对$B_\mu$及$B_{\mu+1}$应用引理9，从而得到一个$(B_{\mu+1},Z)$-群$C'$，它是$C_\mu$的扩群，但$g_\mu$不能扩张为$\pi: C'\to B_{\mu+1}$的分裂同态。此时，令$C_{\mu+1}=C'$。

（3·2）若$\mu\notin E$或$g_\mu: B_\mu\to B_\mu\times Z$不是$\pi: C_\mu\to B_\mu$的分裂同态。此时，可任取一个$(B_{\mu+1},Z)$-群$C'$之适合$C_\mu\subseteq C'$者作为$C_{\mu+1}$。这种$C'$的存在性可如下说明：

任取$\pi: C_\mu\to B_\mu$的一个分裂同态ρ（由B_μ为自由群知ρ存在），并定义$\tau: B_\mu\oplus Z\to C_\mu$为$\tau(b,n)=\rho(b)+(0,n)$。则易见$\tau$为一同构映射。

把$B_{\mu+1}\oplus Z$的子群$B_\mu\oplus Z$依照τ改换为C_μ，可得一个与$B_{\mu+1}\oplus Z$同构的群C'。C'是C_μ的扩群。现在再说明C'仍是$(B_{\mu+1},Z)$-群。

（i）由C_μ为(B_μ,Z)-群及C'作法可知C'的元素集为$B_{\mu+1}\times Z$。

（ii）由ρ为$\pi: C_\mu\to B_\mu$的分裂同态及τ的定义易知，对任何$b\in B_\mu$及任何$n\in Z$，$\tau(b,n)$为(b,n')形状（即其第一分量不变）。再由C'作法即易知射影$\pi: C'\to B_{\mu+1}$是一同态映射。

(iii) 对任何$n\in Z$，由τ的定义易知$\tau(0,n)=(0,n)$。从而可知，对任何$n,m\in Z$,$B_\mu\oplus Z$中的等式$(0,n)+(0,m)=(0,n+m)$在C_μ中仍成立，所以在C'中也成立。

（4）令$C=\bigcup_{\nu<\omega_1}C_\nu$，则$C$是一$(B,Z)$-群。现在证明$\pi:C\to B$不是分裂的。

假若存在$\pi:C\to B$的分裂同态$\rho_1:B\to C$。则由$\pi\rho_1=1_B$及（2）知存在一个$\mu\in E$能使$\rho_1|B_\mu=g_\mu$。由此易知$g_\mu:B_\mu\to B_\mu\times Z$是$\pi:C_\mu\to B_\mu$的分裂同态。所以此时的$C_{\mu+1}$是依（3）中(3·1)的方式定义的。故应$g_\mu$不能扩张为$\pi:C_{\mu+1}\to B_{\mu+1}$的分裂同态。但$\rho_1|B_{\mu+1}$显然是$g_\mu$的扩张并易见它是$\pi:C_{\mu+1}\to B_{\mu+1}$的分裂同态。故得矛盾。

所以，$\pi:C\to B$不是分裂的。从而B不是W-群。　　　证毕

定理16　在$V=L$之下，每个基数为ω_1的W-群都是自由群。

证明　设A是一个基数为ω_1的W-群。

（1）先证A适合Chase条件。

由定理5及定理10易知A是ω_1-自由的。现在证明：A的每个可数子群都被包括在A的一个可数的ω_1-纯子群中。

假若不然，则存在A的可数子群B_0，它不被包括在A的任何可数的ω_1-纯子群中。从而，对A的任何可数子群$C\supseteq B_0$，C不是ω_1-纯的，也即A/C不是ω_1-自由的，故易见存在A的可数子群$C'\supseteq C$能使C'/C不是自由的。

我们先取$C=B_0$，如上找到一个C'，记为B_1，则B_1可数并且B_1/B_0不是自由的；再取$C=B_1$（注意仍有$C\supseteq B_0$），又如上找到一个C'，记为B_2，则B_2可数并且B_2/B_1不是自由的；如此继续超限归纳地进行，到足码为极限序数$\alpha<\omega_1$时，令$B_\alpha=\bigcup_{\xi<\alpha}B_\xi$（注意由$\alpha<\omega_1$知$B_\alpha$仍为可数），这样可得到$A$的一个严格递增的光滑子群链$\{B_\nu|\nu<\omega_1\}$，其中每个$B_\nu$都可数，并且每个$B_{\nu+1}/B_\nu$都

不是自由群.

现在令 $B=\bigcup_{\nu<\omega_1}B_\nu$，则由定理15知$B$不是$W$-群，这与定理5矛盾.

（2）由（1）及引理11，A是一个严格递增的光滑可数自由群链$\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$的并，其中$A_0=\{0\}$并且每个$A_{\nu+1}$都是A的ω_1-纯子群.令

$$E=\{\lambda<\omega_1 | A_\lambda\text{不是}A\text{的}\omega_1\text{-纯子群}\}$$

$$E'=\{\lambda<\omega_1 | A_{\lambda+1}/A_\lambda\text{不是自由的}\}$$

我们证明$E=E'$.

（2·1）若$\lambda\in E'$，则$A_{\lambda+1}/A_\lambda$不是自由的，从而由$A_{\lambda+1}$可数显见A/A_λ不是ω_1-自由的，即A_λ不是A的ω_1-纯子群，所以$\lambda\in E$.

（2.2）反之，若$\lambda\notin E'$，则$A_{\lambda+1}/A_\lambda$是自由的.

对任何$\lambda<\nu<\omega_1$，现在考虑A_ν/A_λ. 由于

$$(A_\nu/A_\lambda)/(A_{\lambda+1}/A_\lambda)\cong A_\nu/A_{\lambda+1}$$

又是自由的（由$A_{\lambda+1}$是A的ω_1-纯子群易见），所以由引理1可知A_ν/A_λ也是自由的.

易见，A/A_λ的每一可数子群C都能被包括在某一$A_\nu/A_\lambda(\lambda<\nu<\omega_1)$中，从而$C$也是自由的. 所以，$A/A_\lambda$是$\omega_1$-自由的，即$A_\lambda$是$A$的$\omega_1$-纯子群，从而$\lambda\notin E$.

（3）由A为W-群及定理15知E'不是ω_1的平稳子集. 故由（2）知E不是ω_1的平稳子集. 再由定理12即知：A是自由群.

证毕

§5 在$MA(\omega_1)$下Whitehead问题的否定答案

引理17 在$MA(\omega_1)$之下，设A,B为两个集合，其中A的基数为ω_1，又设P为一族由A到B内的部分函数（即：每个函数的

定义域都是A的一个子集），并且适合下列性质：

（i）对每一$a\in A$及每一$f\in P$，存在$g\in P$使$f\subseteq g$并且$a\in \mathrm{dom}(g)$.（$\mathrm{dom}(g)$为g的定义域）.

（ii）对P的每个不可数子集P'，存在$f_1,f_2\in P'$及$f_3\in P$使$f_1\neq f_2$并且$f_1\subseteq f_3, f_2\subseteq f_3$.

则存在一函数$g: A\to B$能使：对A的每一有限子集F，存在$f\in P$使$F\subseteq \mathrm{dom}(f)$并且$g|F=f|F$.

证明 把（$P,\supseteq$）看作一偏序集$\langle P,\leqslant\rangle$. 则（ii）说明$\langle P,\leqslant\rangle$适合可数反链条件（c.c.c）.

对每个$a\in A$，令$D_a=\{f\in P\mid a\in \mathrm{dom}(f)\}$，则由（i）知$D_a$是$P$的稠密子集.（$D_a$的个数$\leqslant |A|=\omega_1$）.

所以，由$MA(\omega_1)$可知，存在P中的滤子G，它与每个D_a的交集非空. 由滤子性质知G中任二元都相容，所以G中诸元素的并是一个函数，记之为g. 对每个$a\in A$，由$G\cap D_a\neq\phi$可知$a\in \mathrm{dom}(g)$，所以$\mathrm{dom}(g)=A$.

任取A的有限子集$F=\{a_1,\cdots,a_n\}$. 对每一$a_i(1\leqslant i\leqslant n)$，任取一个$f_i\in G\cap D_{a_i}$. 再由$G$的滤子性质知存在$f\in G$能使$f_1,\cdots,f_n\subseteq f$. 由$f_i\in D_{a_i}(1\leqslant i\leqslant n)$易见$F\subseteq \mathrm{dom}(f)$. 又由$g$的定义知$f\subseteq g$，从而$g|F=f|F$. 证毕

定理18 在$MA(\omega_1)$之下，若可换群A的基数为ω_1并且A适合Chase条件，则A为一W-群.

证明 设$\pi: B\to A$是由一个可换群B到A上的以Z为核的同态映射，以下证明π是分裂的. 令

$$P=\left\{\varphi\ \middle|\ \begin{array}{l}\varphi: S\to B\text{为同态映射且适合}\pi\varphi=1_S\text{；其中}S\\ \text{通过}A\text{的一切有限生成的纯子群}\end{array}\right\}.$$

以下将通过引理19,20,21证明P适合引理17中的条件（i）及（ii），从而由引理17知存在一函数$g: A\to B$，它在A的每一有限子集上都与P中的一个φ一致. 由此易见g为一同态映射，并且适

合$\pi g = 1_A$。所以π是分裂的。再由B及π的任意性即知A是W-群。

P的性质（ i ）是下列引理的特例。

引理19 若$\varphi \in P$且F为A的有限子集，则存在$\varphi' \in P$能使$\varphi \subseteq \varphi'$并且$F \subseteq \mathrm{dom}(\varphi')$。

证明 令$S = \mathrm{dom}(\varphi)$，并令由$S \cup F$生成的（$A$的）子群为$S_1$，则由$\varphi \in P$可知$S_1$是有限生成的（从而是可数的）。

令S_1'为S_1在A中的纯闭包。则S_1'是有限生成的（因：由A适合Chase条件知A是ω_1-自由的，从而是无扭的。再由S_1可数及纯闭包的构成为$S_1' = \{a \in A \mid$存在整数$n \neq 0$使$na \in S_1\}$易知S_1'可数，从而S_1'是自由的。再由S_1为有限生成可知S_1'有限生成。)。

考虑S_1'/S，它是有限生成且无扭的（后者是因S是A的纯子群），所以S_1'/S是自由的。故由引理1可知在S_1'中存在形状为$X \cup Y$的基底，其中X是S的一个基底。

现在定义一个同态映射$\varphi': S_1' \to B$，它由在基底$X \cup Y$上的如下定义所决定：

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \varphi(x)，\text{当}x \in X\text{时。} \\ b_x，\text{当}x \in Y\text{时。其中}b_x\text{是}B\text{中任一个} \\ \quad\quad \text{适合}\pi(b_x) = x\text{的元。} \end{cases}$$

易见φ'适合$\pi\varphi' = 1_{S_1'}$，从而$\varphi' \in P$。并且φ'显然适合引理中的结论。 证毕

P的性质(ii)分以下两个引理证明。

引理20 若P的子集P'适合$|P'| = \omega_1$及下列条件：

（＊） 存在A的纯子群A'，它是自由的，并且它包括P'中每一元素φ的定义域。

则存在$f_1, f_2 \in P'$及$f_3 \in P$使$f_1 \neq f_2$并且$f_1 \subseteq f_3, f_2 \subseteq f_3$。

证明 （1）取A'的一个基底X。

我们先证明，由P'可以得到P的一个不可数子集P_1'，它适合下列诸条件：

（a）$|P_1'|=\omega_1$。

（b）A'包括P_1'中每一元素的定义域。

（c）P_1'中每一元素的定义域都能由 X 的一个有限子集生成。

（d）对每一$\varphi\in P'$，存在$\varphi_1\in P_1'$适合$\varphi\subseteq\varphi_1$。

（1·1）任取$\varphi\in P'$，设其定义域为S。由P的定义知S是有限生成的，又由（$*$）知$S\subseteq A'$。从而易知，存在X的一个最小可能的有限子集X_1，它所生成的子群S_1适合$S\subseteq S_1\subseteq A'$（由于$X$已取定，所以$S_1$由$S$唯一确定。）。

由X为自由群A'的基底易知S_1是A'的纯子群。再由A'是A的纯子群又可知S_1是A的纯子群（由$(A/S_1)/(A'/S_1)\cong A/A'$易知。）。

看S_1/S，它是有限生成的，并且是无扭的（因由P的定义知S是A的纯子群），所以S_1/S是自由群。又由$S\subseteq A'$知S也是自由群，从而由引理1知在S_1中存在形状为$Y\cup Z$的基底，其中Y是S的一个基底。

现在定义一个同态映射$\varphi_1:S_1\to B$，它由在基底$Y\cup Z$上的如下定义所确定：

$$\varphi_1(y)=\begin{cases}\varphi(y)，\text{当}y\in Y\text{时；}\\ b_y，\text{当}y\in Z\text{时。其中}b_y\text{是}B\text{中任一个适}\\ \quad\text{合}\pi(b_y)=y\text{的元。}\end{cases}$$

显然$\varphi\subseteq\varphi_1$，并且易见$\varphi_1$适合$\pi\varphi_1=1_{S_1}$，从而$\varphi_1\in P$。

（1·2）对每个$\varphi\in P'$，可如上得到一个$\varphi_1\in P$。又显见S_1可数，从而易知S_1只能包括可数多个有限生成的子群。由此易知，由不可数集P'所得的下列集合

$$P_1'=\{\varphi_1\in P\,|\,\text{存在}\varphi\in P'\text{使}\varphi_1\text{由}\varphi\text{依（1·1）得出}\}$$

是不可数集。再由$|P'|=\omega_1$可知有$|P_1'|=\omega_1$，即（a）成立。另外，由（1·1）又易见（b），（c），（d）成立。

（2）以下我们将证明引理的结论对P_1'成立。由此及P_1'定义

及（d）即易知引理的结论对P'也成立。

由于当把P'_1划分为可数个子集时至少有一个是不可数的，所以不妨设存在一个正整数m，使P'_1中每个φ的定义域S都恰好由X中的m个元素生成(因：必要时可以用P'_1的一个不可数子集P''_1代替P'_1来进行讨论。如果引理的结论对P''_1成立，则显然对P'_1也成立。)。

记$P'_1=\{\varphi_\nu|\nu<\omega_1\}$，并令$Y_\nu\subseteq X$是$\varphi_\nu$的定义域的一个基底。

由于每个Y_ν的元数为m，故易见存在X的一个适合性质"T被包括在不可数多个Y_ν中"的极大子集T（T可以为空集)。

由于π的核为可数，故知P中至多含有可数多个以$\langle T\rangle$为定义域的φ（因：设$T=\{t_1,\cdots,t_n\}(n\leqslant m)$若$\varphi$，$\varphi'\in P$都以$\langle T\rangle$为定义域，则由$\pi\varphi=1_{\langle T\rangle}=\pi\varphi'$有$\pi(\varphi(t_1)-\varphi'(t_1))=t_1-t_1=0$，从而$\varphi(t_1)-\varphi'(t_1)\in\mathrm{Ker}(\pi)$，所以$\varphi(t_1)-\varphi'(t_1)$只有可数多个可能的值。同理，每个$\varphi(t_i)-\varphi'(t_i)(1\leqslant i\leqslant m)$都只有可数多个可能的值。)。

所以，不妨设当$T\subseteq Y_{\mu_1}$且$T\subseteq Y_{\mu_2}$时φ_{μ_1}与φ_{μ_2}在$\langle T\rangle$上的值相同（因：按照P中的至多可数个以$\langle T\rangle$为定义域的φ，可以把包括T的不可数多个Y_ν分为至多可数个类，使对于同一类中的任二Y_{μ_1},Y_{μ_2}，其相应的φ_{μ_1}与φ_{μ_2}在$\langle T\rangle$上的值相同。在这至多可数个类中，至少有一类含有不可数多个Y_ν。我们以下只考虑这样一类Y_ν即可。）我们还不妨设$T\subseteq Y_0$（必要时重排足码即可)。

对每一$y\in Y_0\setminus T$，只有可数多个ν能使$y\in Y_\nu$（由T的极大性可知），故易见必存在一$\nu\neq0$能使$Y_0\cap Y_\nu=T$。又由于φ_0与φ_ν在$\langle T\rangle$上的值相同，故可知φ_0与φ_ν在$\langle Y_0\cup Y_\nu\rangle$上有一共同的扩张$\psi$：$\langle Y_0\cup Y_\nu\rangle\to B$。且易见$\pi\psi$是$\langle Y_0\cup Y_\nu\rangle$上的恒等映射。

显见$\langle Y_0\cup Y_\nu\rangle$是$A'$的纯子群，再由$A'$是$A$的纯子群可知$\langle Y_0\cup Y_\nu\rangle$是$A$的纯子群。所以$\psi\in P$。

以上说明，P'_1中存在二不同元φ_0与$\varphi_\nu(\nu\neq0)$，它们在P中有共同的扩张ψ。所以，引理的结论对P'_1成立，从而也对P'成立。

证毕

引理21 对P的每个不可数子集P'，存在A的纯子群A'，它是自由群，并且存在P'的不可数子集P''能使A'包括P''中每一元素φ的定义域。

证明 （1）显见，不妨设P'的基数为ω_1。故可记$P'=\{\varphi_\nu|\nu<\omega_1\}$，其中$\varphi_\nu: S_\nu\to B$。

仿照上引理的证法可知，不妨设：存在一正整数m使每个S_ν都有一m元基底（$\nu<\omega_1$）（注意由A为ω_1-自由的及S_ν为有限生成可知S_ν是自由群。）又可设，存在A的一个纯子群T，它被包括在不可数多个S_ν中，并且T对于此性质是极大的（T可以是$\{0\}$）。从而又可设（必要时将P'换为一不可数子集）T就被包括在每个S_ν中。取T的一个基底X，又可对每个S_ν取一个形状为$X\cup Y_\nu$的基底。

（2）以下将超限归纳地定义A的一个光滑的可数子群链$\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$，使对每一$\nu<\omega_1$，A_ν是A的纯子群，并且$A_{\nu+1}/A_\nu$是自由的。然后令$A'=\bigcup\limits_{\nu<\omega_1}A_\nu$，则由定理2可知$A'$是自由群；另外，由诸$A_\nu$为$A$的纯子群易证$A'$也是$A$的纯子群。

（3）诸A_ν的定义如下：

令$A_0=T$。

设已经定义了适合条件的$\{A_\mu|\mu<\nu\}$及一个严格递增的序数列$\{\sigma_{\mu+1}|\mu<\nu\}$能使每个$Y_{\sigma_{\mu+1}}\subseteq A_{\mu+1}$。

（3·1）若ν为一极限序数，令$A_\nu=\bigcup\limits_{\mu<\nu}A_\mu$。

（3·2）若ν为一后继序数$\delta+1$。取C_δ为A中一个包括A_δ的可数的ω_1-纯子群（由A适合Chase条件知C_δ存在）。由于C_δ可数，可知存在一个序数$\sigma_\nu<\omega_1$适合：

$$\sigma_\nu>\sigma_{\mu+1}\text{（对每一}\mu<\nu\text{），并且}\langle Y_{\sigma_\nu}\rangle\cap C_\delta=\{0\}。$$

这是因为：假若不然，则由C_δ可数易知，存在一个$c\in C_\delta$及不可

数多个$\tau<\omega_1$能使$c\in\langle Y_\tau\rangle$；这时，令$T_1$为$\langle T\cup\{c\}\rangle$的纯闭包，则易见对上述的不可数多个$\tau<\omega_1$，$T_1$被包括在由$X\cup Y_\tau$生成的$S_\tau$中（注意每一个$S_\tau$都是$A$的纯子群），这与$T$的极大性矛盾。

现在令A_ν为$\langle A_\delta\cup Y_{\sigma_\nu}\rangle$的纯闭包。易知$A_\nu$是$A$的可数纯子群。现在再证明$A_\nu/A_\delta$是自由群。

先证明$A_\nu\cap C_\delta=A_\delta$。显然$A_\delta\subseteq A_\nu\cap C_\delta$。反之，任取$a\in A_\nu\cap C_\delta$，则由纯闭包的构成可知存在整数$n\neq0$能使$na\in\langle A_\delta\cup Y_{\sigma_\nu}\rangle=A_\delta+\langle Y_{\sigma_\nu}\rangle$，所以存在$a_1\in A_\delta$及$a_2\in\langle Y_{\sigma_\nu}\rangle$能使$na=a_1+a_2$，从而有$a_2=na-a_1\in\langle Y_{\sigma_\nu}\rangle\cap C_\delta=\{0\}$，所以$na=a_1\in A_\delta$，又由归纳假设知$A_\delta$是$A$的纯子群，所以$A/A_\delta$无扭，由此及$na\in A_\delta$即易知$a\in A_\delta$，所以$A_\nu\cap C_\delta\subseteq A_\delta$。

由以上可知

$$A_\nu/A_\delta=A_\nu/(A_\nu\cap C_\delta)\cong(A_\nu+C_\delta)/C_\delta\subseteq A/C_\delta.$$

再由C_δ为A的ω_1-纯子群即知A_ν/A_δ是自由群。

（4）现在令

$$P''=\{\varphi_{\sigma_{\mu+1}}\mid\mu<\omega_1\},$$

即易见P''适合引理的结论。　　证毕

引理21与引理20合起来说明了P的性质（ii）。定理18的证明至此完成。

定理22　存在基数为ω_1的可换群A，它适合Chase条件但不是自由群。

证明　（1）以下将超限归纳地定义一个严格递增的可数可换群的光滑链$\{A_\nu\mid\nu<\omega_1\}$使适合下列诸条件：

（i）$A_0=\{0\}$并且对每个$\nu<\omega_1$，A_ν是自由的。

（ii）对任何$\mu<\nu<\omega_1$，$A_\nu/A_{\mu+1}$是自由的。

（iii）对每个极限序数$\lambda<\omega_1$，$A_{\lambda+1}/A_\lambda$不是自由的。

对于这样的链，令$A=\bigcup_{\nu<\omega_1}A_\nu$，则$A$适合定理的结论。这是

因为：首先，显见有$|A|=\omega_1$。其次，由A的定义及ω_1的正则性及（i）易知A是ω_1-自由的；又易知，对任何$\mu<\omega_1$，$A/A_{\mu+1}$的每一可数子群都被包括在某一$A_\nu/A_{\mu+1}(\mu<\nu<\omega_1)$中，从而由（ii）可知$A/A_{\mu+1}$是$\omega_1$-自由的；所以$A_{\mu+1}$是$A$的$\omega_1$-纯子群，再由引理11即知$A$适合Chase条件。第三，由以上及（iii）可知，

$$E=\{\lambda\,|\,A_\lambda\text{不是}A\text{的}\omega_1\text{-纯子群}\}$$
$$=\{\lambda\,|\,\lambda\text{为小于}\omega_1\text{的极限序数}\}.$$

易见E是ω_1的平稳子集，故由定理12知A不是自由群。

（2）现在定义诸A_ν。

令$A_0=\{0\}$。

设对于某$\delta<\omega_1$，已经定义了适合条件的诸$A_\nu(\nu<\delta)$。现在分三种情况定义A_δ：

(2·1) 若$\delta=\nu+1$且ν不是极限序数，令$A_\delta=A_\nu\oplus Z$。此时易见（i）、(ii)、(iii) 成立。

(2·2) 若δ为一极限序数λ，令$A_\lambda=\bigcup_{\nu<\lambda}A_\nu$。此时，取一个严格递增的后继序数列$\{\sigma_n\,|\,n<\omega\}$使其以$\lambda$为极限（由$\lambda<\omega_1$易知这样的序数列存在），则易见有$A_\lambda=\bigcup_{n<\omega}A_{\sigma_n}$。由归纳假设的 (ii) 知每个$A_{\sigma_{n+1}}/A_{\sigma_n}$都是自由的，故由定理2知$A_\lambda$是自由的(即(i)成立)，并且每个$A_\lambda/A_{\sigma_n}$也是自由的（$n<\omega$）。对任何$\mu<\lambda$，存在$n<\omega$使$\mu<\sigma_n$，从而$A_{\mu+1}\subseteq A_{\sigma_n}$，现在看$A_\lambda/A_{\mu+1}$：由于它的子群$A_{\sigma_n}/A_{\mu+1}$是自由的（由归纳假设），而商群$(A_\lambda/A_{\mu+1})/(A_{\sigma_n}/A_{\mu+1})\cong A_\lambda/A_{\sigma_n}$由上知也是自由的，故由引理1知$A_\lambda/A_{\mu+1}$也是自由的，即 (ii) 成立。此时 (iii) 不足道地成立。

(2·3) 若$\delta=\lambda+1$且λ为一极限序数。此时，仍取一个严格递增的后继序数列$\{\sigma_n\,|\,n<\omega\}$使其极限为$\lambda$，且不妨设$\sigma_0=0$。由定理2的证法可知，存在一个光滑的集合链$\{X_n\,|\,n<\omega\}$能使每个$X_n$是$A_{\sigma_n}$的基底（并且由归纳假设的诸$A_{\sigma_n}$严格递增知诸$X_n$严格递增）。对每个$n\geqslant1$，任意取定一个$x_n\in X_n\setminus X_{n-1}$，再令$Y_n=$

$X_n \setminus (X_{n-1} \cup \{x_n\})$。

令B为由$\bigcup_{1\leqslant n<\omega} Y_n$生成的($A_\lambda$的)子群，并令$P$为无限直积$\Pi_{n=1}^{\infty}\langle x_n\rangle$。现在定义$A_{\lambda+1}$为：$B\oplus P$中由$A_\lambda$及$\{z_m | 1\leqslant m<\omega\}$所生成的子群。其中$z_m$为$P$中由形式和

$$z_m = \sum_{n\geqslant m} (n!/m!)x_n$$

在自然意义下所代表的元素。

易于验证$\bigcup_{1\leqslant n<\omega} Y_n \cup \{z_m | 1\leqslant m<\omega\}$是$A_{\lambda+1}$的一个基底（注意有$x_n = z_n - (n+1)z_{n+1}$，$(1\leqslant n<\omega)$。)，所以(i)成立。对每一$k<\omega$，由计算不难看出$A_{\lambda+1}/A_{\sigma_k}$同构于$A_{\lambda+1}$由中$\bigcup_{n>k} Y_n \cup \{z_m | k+1\leqslant m<\omega\}$生成的子群，从而$A_{\lambda+1}/A_{\sigma_k}$是自由的。再仿(2·2)可知(ii)成立。现在证(iii)：注意对每一个$m\geqslant 1$都有$m!\,z_m - z_1 \in A_\lambda$，所以$A_{\lambda+1}/A_\lambda$中的元$[z_1]$能被每个正整数$m$整除。但$[z_1]$是非0元（因显然$z_1 \notin A_\lambda$），故知$A_{\lambda+1}/A_\lambda$不是自由群，即(iii)成立。　　证毕

由定理18及定理22即可得：

定理23　在$MA(\omega_1)$之下，存在元数为ω_1的W-群A，它不是自由群。

参 考 文 献

〔1〕A.Ehrenfeucht.Bull.Acad.Polon.Sci.,Ⅲ,3(1955),127—128.

〔2〕R.Nunke, Lecture Notes in Math., 616 (1977), 240—250.

〔3〕S.Shelah, Israel Jour.Math.,18(1974),243—256.

〔4〕P.Eklof, Amer.Math.Monthly,83(1976),775—788.

〔5〕K.Stein,Math.Annalen,123(1951),201—222.

〔6〕J.Jans,Rings and Homology,Holt-Rinehart & Win-

ston, New York,1964.
〔 7 〕 R.Jensen,Ann. Math.Logic,4(1972).229—308.
〔 8 〕 S.Shelah,Israel Jour.Math., 21(1975), 319-349.

第二章 Crawley问题的独立性

Crawley问题是指P.Crawley提出的一个关于可换群的问题，最初见于R.Warfield的文献〔1〕．除这二人外，P.Hill，C.Megibben及R.Nunke等都曾在六十及七十年代研究过相关的问题．后来，Megibben在1983年的文献〔2〕中证明了Crawley问题相对于ZFC的独立性．A.H.Mekler和S.Shelah并在〔10〕、〔11〕中作进一步研究．

为了介绍这一问题及上述结果，我们先作一些准备．

§1 预备知识（一）

定义 设G为一可换群，p为一素数．如果G中每个元素的周期都是p的方幂，则称G为一**可换p-群**．

本章只讨论可换p-群（以下有时简称为p-群），采用加法记号．

定义 设G为一可换p-群，对每一自然数n，令$p^nG=\{p^nx\mid x\in G\}$，并令$p^\omega G=\bigcap_{n<\omega}p^nG$．如果$p^\omega G=\{0\}$，则称$G$为**可分的**（separable）．如果$p^\omega G=\{0\}$并且$G$的每一可数子集都能被包括在$G$的一个可数的直和项中，则称$G$为**$\omega_1$-可分的**．

定义 设G为一可换p-群．令$G[p]=\{x\in G\mid px=0\}$，称为G的**基座**（socle）．$G[p]$的每一子群都称为G的一个**子基座**．

我们将把可换p-群看作一个具有p-进拓扑（即：以诸p^nG（$n<\omega$）作为0元的邻域基）的拓扑群，并把G的基座$G[p]$看作一个具有相应的诱导拓扑的拓扑向量空间．

在以下的讨论中，具有余维数（codimension）1的诸稠密子基座P将起重要作用（即这样的子基座P，它是$G[p]$的稠密子空间，并且$G[p]/P$同构于p元循环群$Z(p)$.）。

如果G是一些循环子群的直和，简称G为**Σ-循环**的。

Crawley[3]以及Hill与Megibben[4]曾证明，如果可分的可换p-群G是Σ-循环的，则G适合下列的性质(α)："任何两个适合$p^{\omega}A\cong p^{\omega}B$及$A/p^{\omega}A\cong G\cong B/p^{\omega}B$的可换$p$-群$A$，$B$都同构。"

反之，Nunke[5]及Warfield[1]证明了：如果可分的可换p-群G适合上述性质(α)，则G是Σ-循环的。

Crawley问题是一个先此提出的类似的反问题，即：如果可分的可换p-群适合下列的性质(β)："任何两个适合$p^{\omega}A\cong p^{\omega}B\cong Z(p)$及$A/p^{\omega}A\cong G\cong B/p^{\omega}B$的可换$p$-群$A$，$B$都同构。"$G$是否必为$\Sigma$-循环的（性质($\beta$)至少在表面上比性质($\alpha$)弱。）？

定义 我们把适合性质(β)的可分可换p群称为**Crawley群**。

关于Crawley问题，Megibben在[2]中证明了下列的独立性结果：一方面，在$V=L$之下，每个基数为ω_1的Crawley群都是Σ-循环的。另一方面，在$MA(\omega_1)$之下，存在基数为ω_1的Crawley群A，它不是Σ-循环的（由此及以上也可知，在ZFC中，性质(β)的确要比性质(α)弱。）。

本章的内容就是证明这两个结果（见以下定理4及定理11）。我们依照[2]中的证法。

根据F.Richman[6]中的结果，[2]中对于Crawley群提出了如下的等价条件（[2]中称为Richman准则）。

定理1 设G为一可分可换p群，则G为Crawley群的充分必要条件是：G的自同构群Aut(G)可迁地作用于G的余维数为1的稠密子基座上。

我们以下将按照这一等价条件去讨论Crawley群（我们也可把它看作Crawley群的定义。）。

定义 设G为一群，$F=\{G_\alpha|\alpha<\omega_1\}$是$G$的一个光滑子群链. (光滑子群链的定义见第一章. 在此即为：对每个$\alpha<\omega_1$有$G_\alpha\subseteq G_{\alpha+1}$并且对每个极限序数$\alpha<\omega_1$有$G_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}G_\beta$.)．如果有$G=\bigcup_{\alpha<\omega_1}G_\alpha$，则称$F$为$G$的一个$\omega_1$-**过滤**($\omega_1$-filtration).

定义 设U为ω_1的子集.如果U在ω_1中无界并且U的任何可数子集的最小上界仍在U中，则称U为ω_1的一个**无界闭子集**，以下简称U为一个cub.

引理2 设G为一可分可换p群，它不是Σ-循环的. 又设P是G的一个余维数为1的稠密子基座，并且$\{P_\alpha|\alpha<\omega_1\}$是$P$的一个$\omega_1$-过滤. 令

$$E=\{\alpha<\omega_1|\alpha\text{为极限序数并且}P_\alpha\text{不是}P\text{的闭子集}\},$$

则E是ω_1的平稳子集(平稳子集的定义见第一章§3).

证明略去，见[2]引理2.3.

§2 在$V=L$下Crawley问题的肯定答案

定理3 在$V=L$之下，设$\{G_\alpha|\alpha<\omega_1\}$是群$G$的一个$\omega_1$-过滤，并设$E$是$\omega_1$的一个平稳子集，则存在函数族$\{f_\alpha:G_\alpha\to G_\alpha|\alpha\in E\}$适合下列性质：

对任何函数$g:G\to G$，$\{\alpha|\alpha\in E\text{且}(g|G_\alpha)=f_\alpha\}$都是$\omega_1$的平稳子集.

定理3的证明略去（参看[7]）. 我们也可以把它自身（去掉"在$V=L$之下"的字样后）看作一条与ZFC相对和谐的新公理.

定理4 在$V=L$之下，每个基数为ω_1的Crawley群都是Σ-循环的.

证明 (1) 设G是一个基数为ω_1的可分p-群，并设它不是Σ-循环的. 以下证明G不适合定理1中的条件，从而G不是Crawley群(由此即知定理成立).

（2）任意取定G的一个余维数为1的稠密子基座P。以下要找G的一个余维数为1的稠密子基座Q使：在G的每一自同构θ之下，都有$\theta(P)\neq Q$。从而G不适合定理1中的条件。

（3）任意取定一个$z\in G[p]\setminus P$，并取P的一个ω_1-过滤$\{P_\alpha|\alpha<\omega_1\}$使适合：

(3·1) z属于P_ω的闭包。

(3·2) $P_{\alpha+1}=P_\alpha+\langle z_\alpha\rangle$（对一切$\alpha<\omega_1$）。

（由P在$G[p]$中稠密易知这样的$\{P_\alpha|\alpha<\omega_1\}$存在。）

（4）据此，我们可以归纳地定义G的一个ω_1-过滤$\{G_\alpha|\alpha<\omega_1\}$使：每个$G_\alpha(\alpha<\omega_1)$都适合

$$G_\alpha[p]=P_\alpha+\langle z\rangle,$$

并且G_α是适合此等式的极大子群（易知这样的$\{G_\alpha|\alpha<\omega_1\}$存在。）。

（5）现在令

$E=\{\alpha<\omega_1|\alpha\neq 0$为极限序数，并且$P_\alpha$不是$P$的闭子集$\}$

则由引理2可知E是ω_1的平稳子集。再由定理3可知，在$V=L$之下，存在函数族$\{f_\alpha:G_\alpha\to G_\alpha|\alpha\in E\}$能使：

对任何函数$g:G\to G$，$\{\alpha|\alpha\in E$且$(g|G_\alpha)=f_\alpha\}$都是ω_1的平稳子集。

（6）现在归纳地构作一个子基座的光滑链$\{Q_\alpha|\alpha<\omega_1\}$使适合下列三条件。

(6·1) 对每一$n<\omega$，$Q_n=P_n$；对每一$\alpha<\omega_1$，$z\notin Q_\alpha$。

(6·2) 如果$\alpha\in E$，$f_\alpha(P_\alpha)=Q_\alpha$，并且存在$\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$使：$z\notin\varphi(P)$且$\varphi|G_\alpha=f_\alpha$，则对某个这样的$\varphi$有

$$Q_{\alpha+1}=Q_\alpha+\langle y_\alpha-z\rangle,$$

其中$y_\alpha=\varphi(x_\alpha)$而$x_\alpha$是一个在$P_\alpha$的闭包中而不在$P_\alpha$中的元素（注意由$\alpha\in E$知$P_\alpha$不是$P$的闭子集。）。

(6·3) 如果β是极限序数或$\beta=\alpha+1$而α不适合（6·2）中的

条件，则 $P_\beta \subseteq Q_\beta + \langle z \rangle$。

关于$\{Q_\alpha | \alpha < \omega_1\}$的构作，以下作一些说明（见(7)至(9)）。

（7）先说明，对于适合（6·2）中条件的α，由其中的题设$z \notin \varphi(P)$可以证明$z \notin Q_{\alpha+1}$，从而，依(6·2)所得的$Q_{\alpha+1}$与(6·1)不矛盾，$z \notin Q_{\alpha+1}$的证明如下。

假若$z \in Q_{\alpha+1} = Q_\alpha + \langle y_\alpha - z \rangle$，则$z = q_\alpha + r(y_\alpha - z)$($q_\alpha \in Q_\alpha$，$r$为一整数。)。故有$(1+r)z = q_\alpha + r y_\alpha$，再分二情况。

(7·1)若$p \nmid 1+r$，则存在整数s能使（注意$z \in G[p]$）

$$z = s(q_\alpha + r y_\alpha) = s(\varphi(p_\alpha) + r\varphi(x_\alpha)),$$

其中$p_\alpha \in P_\alpha$，由此易见$z \in \varphi(P)$，与题设矛盾。

（7·2）若$p | 1+r$，则$r \equiv -1 \pmod p$，故由$z = q_\alpha + r(y_\alpha - z)$及$pz = 0$可得$y_\alpha = q_\alpha \in Q_\alpha$（注意$y_\alpha = \varphi(x_\alpha)$且$x_\alpha \in G[p]$），也即$\varphi(x_\alpha) \in \varphi(P_\alpha)$，从而有$x_\alpha \in P_\alpha$，与(6·2)中$x_\alpha$的取法不合。

（8）若$\beta < \omega_1$为一极限序数并且（6·3）对一切$r < \beta$都已成立。则Q_β也适合（6·3），证明如下。

由光滑链定义知$Q_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} Q_\gamma$，对每个$\gamma < \beta$来看：

（8·1）如果$\gamma = \alpha + 1$并且α适合（6·2）中的条件。这时看$\gamma' = \gamma + 1$（仍小于ω_1），由于γ不是极限序数，所以$\gamma \notin E$，从而γ不适合（6·2）中的条件。所以由关于γ'的归纳假设（6·3）有

$$P_\gamma \subseteq P_{\gamma'} \subseteq Q_{\gamma'} + \langle z \rangle.$$

（8·2）如果γ不是（8·1）的情况，则由关于γ的归纳假设（6·3）有

$$P_\gamma \subseteq Q_\gamma + \langle z \rangle.$$

由以上可得

$$P_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} P_\gamma \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} (Q_\gamma + \langle z \rangle) = \bigcup_{\gamma<\beta} Q_\gamma + \langle z \rangle = Q_\beta + \langle z \rangle.$$

其中的“$\subseteq$”是根据（8·1）或（8·2）（显见用（8·1）时无妨）。所以（6·3）对β也成立。

（9）若$\beta = \alpha + 1$且α不适合（6·2）中的条件，现在看如何

定义Q_β使（6·3）成立。由（3·2）有$P_\beta = P_\alpha + \langle z_\alpha \rangle$，再对$\alpha$分二情况：

（9·1）若$\alpha = \delta + 1$并且δ（看作α时）适合（6.2）中的条件，则由关于δ的归纳假设（6.2）有$Q_\alpha = Q_\delta + \langle y_\delta - z \rangle$。此时，令

$$Q_\beta = Q_\alpha + \langle z_\delta \rangle + \langle z_\alpha \rangle,$$

就能使

$$P_\beta = P_\alpha + \langle z_\alpha \rangle = P_\delta + \langle z_\delta \rangle + \langle z_\alpha \rangle \subseteq Q_\delta + \langle z_\delta \rangle + \\ + \langle z_\alpha \rangle + \langle z \rangle \subseteq Q_\alpha + \langle z_\delta \rangle + \langle z_\alpha \rangle + \langle z \rangle = Q_\beta + \langle z \rangle.$$

（9·2）若α不是(9·1)的情况，则由关于α的归纳假设(6·3)有$P_\alpha \subseteq Q_\alpha + \langle z \rangle$。此时，令

$$Q_\beta = Q_\alpha + \langle z_\alpha \rangle,$$

就能使

$$P_\beta = P_\alpha + \langle z_\alpha \rangle \subseteq Q_\alpha + \langle z_\alpha \rangle + \langle z \rangle = Q_\beta + \langle z \rangle.$$

（10）由（7）至(9)即易见能构作$\{Q_\alpha | \alpha < \omega_1\}$如(6)中所述。现在令

$$Q = \bigcup_{\alpha < \omega_1} Q_\alpha,$$

则可知Q的余维数为1.这是由于：(i)由（6·1)及Q的定义有$z \notin Q$，(ii)由P的余维数为1及z的取法及（6·3)及诸Q_α的作法又易见有

$$G[p] = P + \langle z \rangle \subseteq Q + \langle z \rangle \subseteq G[p].$$

由(i)、(ii)易知$G[p]/Q \cong Z(p)$。

另外，由（3·1）知z在P_ω的闭包中。又由（6·1）有

$$P_\omega = \bigcup_{n<\omega} P_n = \bigcup_{n<\omega} Q_n = Q_\omega.$$

再由$Q_\omega \subseteq Q + \langle z \rangle = G[p]$可知$Q$是一个稠密的子基座。

（11）现在证明，不存在G的自同构θ能使$\theta(P) = Q$。假设有一个这样的θ存在，以下将推出矛盾。

（12）令$U_1 = \{\alpha < \omega_1 | \theta(P_\alpha) = Q_\alpha\}$，则可证$U_1$为一cub。例

如U_1的无界性可如下证明。

任取$\beta<\omega_1$，考虑P_β。由（3）易知P_β可数，故可记为$P_\beta=\{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$。

令$\varphi(p_n)=q_n$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$。由$Q=\bigcup_{\alpha<\omega_1}Q_\alpha$及$q_1\in Q$知

存在$\alpha_1<\omega_1$使$q_1\in Q_{\alpha_1}$且$\beta<\alpha_1$；再由$q_2\in Q$仿上知存在$\alpha_2<\omega_1$使$q_2\in Q_{\alpha_2}$且$\alpha_1<\alpha_2$；$\cdots$。

令$\gamma_1=\bigcup_{i<\omega}\alpha_i$，则由$\omega_1$的正则性知$\gamma_1<\omega_1$，且由以上易见有$\varphi(P_\beta)\subseteq Q_{\gamma_1}$。

再考虑$\varphi^{-1}(Q_{\gamma_1})$，仿上可得$\delta_1<\omega_1$使$\gamma_1<\delta_1$且$\varphi^{-1}(Q_{\gamma_1})\subseteq P_{\delta_1}$，从而也有$Q_{\gamma_1}\subseteq\varphi(P_{\delta_1})$。

如此继续，可得

$$\gamma_1<\delta_1<\gamma_2<\delta_2<\cdots<\gamma_n<\delta_n<\cdots,\ (n<\omega).$$

令$\gamma=\bigcup_{n<\omega}\gamma_n=\bigcup_{n<\omega}\delta_n$。则由

$$Q_{\gamma_1}\subseteq\varphi(P_{\delta_1})\subseteq Q_{\gamma_2}\subseteq\varphi(P_{\delta_2})\subseteq\cdots$$

可得$Q_\gamma=\varphi(P_\gamma)$，从而$(\beta<)\gamma\in U_1$。

以上说明了U_1在ω_1中无界。U_1的封闭性也不难证明，略去。

（13）再令$E_1=\{\alpha|\alpha\in E$且$(\theta|G_\alpha)=f_\alpha\}$。由（5）知$E_1$是$\omega_1$的平稳子集，从而$E_1\cap U_1$不空。

取$\beta\in E_1\cap U_1$，则有

$$\theta(P_\beta)=Q_\beta\text{且}(\theta|G_\beta)=f_\beta\text{且}\beta\in E.$$

又因$z\notin Q=\theta(P)$，所以θ适合（6·2）中的前提，故由（6·2）知

$$Q_{\beta+1}=Q_\beta+\langle y_\beta-z\rangle,$$

其中$y_\beta=\rho(x_\beta)$，x_β在P_β的闭包中而不在P_β中，ρ是G的一个适合$(\rho|G_\beta)=f_\beta$及$z\notin\rho(P)$的自同构。

由x_β取法可知，存在P_β中的元素列$\{x_n|n<\omega\}$能使$\lim_{n\to\infty}x_n=x_\beta$。又易见$G$的自同构对于$p$-进拓扑都是连续的，故有

$$y_\beta=\rho(x_\beta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n)=\lim_{n\to\infty}f_\beta(x_n)=\lim_{n\to\infty}\theta(x_n)$$

$=\theta(x_\beta)\in\theta(P)=Q$.

另一方面，由$Q_{\beta+1}=Q_\beta+\langle y_\beta-z\rangle$知$y_\beta-z\in Q_{\beta+1}\subseteq Q$，再由$z\notin Q$可知$y_\beta\notin Q$。与上矛盾。

所以，(11) 中的假设不成立。再由(2) 及 (1) 即知定理成立。 证毕

§3 预备知识（二）

定理5 存在基数为ω_1的ω_1-可分可换p-群A，它不是Σ-循环的。

证明略去，见〔18〕定理75.1。

引理6 设可换p-群G是Σ-循环的，B_1与B_2是G的两个基本(basic)子群且适合$G/B_1\cong G/B_2$。则存在G的自同构φ能使$\varphi(B_1)=\varphi(B_2)$。

证明略去，见〔9〕定理1。

定理7 设G是一个ω_1-可分的可换p-群，并且对一切可数的可换p-群S都有$\mathrm{Pext}(G,S)=0$，则G是Crawley群（注：关于函子Pext的定义及性质，可参看〔8〕§53）。

证明 (1) 任取G的两个余维数为1的稠密子基座P，Q。以下将证明，存在G的自同构θ能使$\theta(P)=Q$，从而由定理1即知G为一Crawley群。

(2) 任取$a\in G[p]\setminus P$及$b\in G[p]\setminus Q$，由P，Q在$G[p]$中的稠密性易知，存在P中的元素列$\{a_n|n<\omega\}$及Q中的元素列$\{b_n|n<\omega\}$，能使$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$。

又因G是ω_1-可分的，故知存在G的可数直和项C能包含a，b及一切a_n，b_n。

(3) 现在证明，存在G的纯子群H，K能使：$H[p]=P$，$K[p]=Q$，并且存在$M\subseteq H$及$L\subseteq K$适合$G=C\oplus M=C\oplus L$。

(4) 由G的可分性知G中每个元的高度都有限，故由C为

可数知G是Σ-循环的。

易见C中每个闭的子基座都支撑（support）一个直和项。所以，存在直分解$C=C_1\oplus B_1$，其中$C_1[p]$是$C\cap P$的闭包。

再选取C_1的一个基本子群A使$A[p]=C\cap P$，并选取G的一个纯子群H使$H\supseteq A$且$H[p]=P$。

（5）由（4）易见有 $(H\cap C_1)[p]=P\cap C_1=A[p]$。

现在再证明 $(H\cap C_1)[p^2]=A[p^2]$。由A及H的取法显见有"$\supseteq$"成立。反之，任取$a\in(H\cap C_1)[p^2]$，则有$pa\in(H\cap C_1)[p]=A[p]$，从而$pa\in A$，再由A为C_1的纯子群及$a\in C_1$知存在$a_1\in A$能使$pa=pa_1$，所以$a-a_1\in(H\cap C_1)[p]=A[p]$，从而有$a-a_1\in A$及$a\in A$，所以$a\in A[p^2]$。

仿上可归纳地证明 $(H\cap C_1)[p^n]=A[p^n]$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$。从而有$H\cap C_1=A$。

（6）现在，任意取定一个直分解$G=C_1\oplus N$（易见N存在），并以π记由G到N上的射影。

由C_1/A的可除性及H为G的纯子群，可知$\pi(H)$也是G的纯子群。证明如下：

任取$b\in\pi(H)$及正整数n，设$nx=b$在G中有解为g，以下证$nx=b$在$\pi(H)$中也有解。由$b\in\pi(H)$知存在$h\in H$使$b=\pi(h)$。设h在$C_1\oplus N$中表示为$h=c_1+\mu$，则$b=\pi(c_1+\mu)=\mu$，所以$h=c_1+b$。又由C_1/A的可除性知存在$c_1'\in C_1$能使$c_1+A=nc_1'+A$，所以$c_1=nc_1'+a(a\in A\subseteq H)$，从而$n(c_1'+g)=nc_1'+b=c_1-a+b=h-a=h_1\in H$。再由$H$为$G$的纯子群可知存在$h_2\in H$能使$nh_2=n(c_1'+g)=h_1$，从而有$n\pi(h_2)=\pi(h_1)=\pi(nc_1'+b)=b$。

（7）考虑正合列

$$0\to A\xrightarrow{\lambda}H\xrightarrow{\pi}\pi(H)\to 0,$$

其中λ为包入映射，由题设知$\mathrm{Pext}(G, A)=0$，再由$\pi(H)$是G的纯子群可知也有$\mathrm{Pext}(\pi(H), A)=0$。所以上述的正合列分裂

(split)，从而存在一个直分解$H=A\oplus J$。

（8）易见有$G[p]\subseteq C_1+P$(因：由a的取法知$a\notin P$。又由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$及诸$a_n\in C\cap P$及$C_1[p]$是$C\cap P$的闭包可知$a\in C_1[p]$。所以$C_1[p]\setminus P$不空。再由$G[p]/P\cong Z(p)$即易知$G[p]\subseteq C_1+P$。)。由此及$A$是$C_1$的基本子群可以归纳地证明

$$G[p^n]\subseteq C_1+H,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

例如：$n=1$时，由H的取法可知。$n=2$时：任取$a\in G[p^2]$，则$pa\in G[p]\subseteq C_1+H$，所以$pa=c_1+h(c_1\in C_1,\ h\in H)$。再由$C_1/A$的可除性知存在$c_2\in C_1$使$c_1=pc_2+a_1(a_1\in A\subseteq H)$，从而$pa=pc_2+(a_1+h)$。再由$a_1+h=p(a-c_2)$及$H$为$G$的纯子群知存在$h_1\in H$使$a_1+h=ph_1$，从而有$pa=pc_2+ph_1$。由此知$a-c_2-h_1\in G[p]\subseteq C_1+H$，从而$a\in C_1+H$。

（9）由（8)及G的可分性知$G\subseteq C_1+H=C_1+(A\oplus J)$，再由$A\subseteq C_1$可得$G=C_1+J$。又因$H\cap C_1=A$(见(5))，再由$H=A\oplus J$可得$C_1\cap J=\{0\}$，所以有$G=C_1\oplus J$。

由此及$C_1\subseteq C$又可得$C=C_1\oplus(C\cap J)$。

(10) 由于C是G的直和项，所以存在G的子群D能使$G=C\oplus D$。现在令$M=J\cap(C_1\oplus D)$，则有$M\subseteq H$，以下证明$G=C\oplus M$。

先证$G=C+M$，任取$g\in G$，由$G=C_1\oplus J$有$g=c_1+j(c_1\in C_1,\ j\in J)$。又由$G=C\oplus D=(C\cap J)\oplus(C_1\oplus D)$有$j=j_1+k(j_1\in C\cap J,\ k\in C_1\oplus D)$。故有$k=j-j_1\in J$，从而$k\in J\cap(C_1\oplus D)=M$。所以$g=(c_1+j_1)+k\in C+M$。

再证$C\cap M=\{0\}$。任取$a\in C\cap M$，则$a\in J$且$a\in C_1\oplus D$。设$a=c_1+d(c_1\in C_1,d\in D)$，则$a-c_1=d\in C\cap D=\{0\}$，从而$a=c_1\in C_1$，所以$a\in C_1\cap J=\{0\}$，$a=0$。

(11) 完全仿照（4）至（10)，可知：存在G的纯子群K能使$K[p]=Q$，并且存在$L\subseteq K$适合$G=C\oplus L$。

(12) 由$G=C\oplus M$及$M\subseteq H$可得$H=(H\cap C)\oplus M$，同理有

$K=(K\cap C)\oplus L$。故有

$$C/(H\cap C)\cong G/H\cong Z(p^{\infty})\cong G/K\cong C/(K\cap C),$$

由此及引理6可知，存在C的自同构φ能使$\varphi(H\cap C)=K\cap C$。

(13) 由$C\oplus M=G=C\oplus L$有$M\cong G/C\cong L$。任意取定一个由M到L上的同构映射λ，则由φ及λ可依自然方式生成G的一个自同构映射θ。

显见有$\theta|C=\varphi$及$\theta(M)=L$，由此及$\varphi(H\cap C)=K\cap C$可知

$$\theta(H)=\theta((H\cap C)\oplus M)=(K\cap C)\oplus L=K,$$

再由$H[p]=P$及$K[p]=Q$即可得$\theta(P)=Q$。

(14) 由 (13) 以及 (1) 中P、Q的任意性，即知G是一个Crawley群。 证毕

引理8 一个可换群G为Σ-循环的充分必要条件是：对任何纯正合列

$$0\to A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\to 0$$

(即$\alpha(A)$为B的纯子群者）及任何$\varphi:G\to C$，都存在$\psi:G\to B$能适合$\beta\psi=\varphi$。

证明略去，见[8]定理30.2。

引理9 设B是可换群A的一个p-子群，则B能嵌入A的一个有界直和项中的充分必要条件是：B中非0元相对于A的高度有界。

证明略去，见[8]定理27.8。

§4 在$MA(\omega_1)$下Crawley问题的否定答案

定理10 在$MA(\omega_1)$之下，若G是一个基数为ω_1的ω_1-可分可换p-群，则对每个可数可换p-群S都有$\mathrm{Pext}(G,S)=0$。

证明 (1) 考虑任一个如下的正合列

$$0\to S\xrightarrow{\lambda}K\xrightarrow{\pi}G\to 0.$$

其中S是K的一个可数纯子群，λ为包入映射。

[illegible]证明，在$MA(\omega_1)$之下，存在同态映射$\psi: G\to K$能使$\pi\psi=1_G$。从而知定理成立。

（2）令

$$P=\{\varphi \mid \varphi: T\to K \text{ 且 } \pi\varphi=1_T,\ T\text{是}G\text{的有限直和项}\}$$

则P对于“$\supseteq$”（视为“$\leqslant$”）是一偏序集。

（3）对每一$g\in G$，令

$$D_g=\{\varphi\in P \mid g\text{在}\varphi\text{的定义域中}\}.$$

不难证明，每个D_g都是P的稠密子集。

（4）如果P适合c.c.c.（以下（5）至（11）将证明此事），则利用$MA(\omega_1)$可以如下得到（1）中所说的ψ。

由$MA(\omega_1)$知存在P中的滤子F能与每个D_g都相交（g通过G，注意G的基数为ω_1）。

对每个$g\in G$，任意取定一个$\varphi_g\in F\cap D_g$。现在定义一个由G到K的映射ψ如下：令

$$\psi(g)=\varphi_g(g),\ (g\in G).$$

易见ψ是同态映射，并且适合$\pi\psi=1_G$。

（5）现在开始证明P适合c.c.c.。任取P的不可数子集P'。我们将证明

（5·1）存在$\varphi_1, \varphi_2\in P'(\varphi_1\neq\varphi_2)$在$P$中相容（即存在$\varphi\in P$使$\varphi_1, \varphi_2\subseteq\varphi$）。

为此，我们先证明

（5·2）存在G的Σ-循环纯子群A，它能包括P'中不可数多个φ的定义域。

（6）不妨设P'的基数为ω_1，记之为$P'=\{\varphi_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$，（$\alpha\neq\beta$时$\varphi_\alpha\neq\varphi_\beta$）。并把每个$\varphi_\alpha$的定义域记为$T_\alpha$。

如果存在G的可数纯子群A_1能包括不可数多个T_α，则由于A_1必是Σ-循环的，所以（5·2）已真。以下考虑不存在这种A_1的情况。

由于每个T_α都是有限的，所以T_α的元数只有可数多种可能．故易见不妨设（必要时把P'缩小）P'中诸φ_α的定义域T_α元数都相同。

（7）在G中任意取定一个如下的子群T：（i）T被包括在不可数多个T_α中；并且（ii）T对于性质（i）为极大(易见这样的T存在.)。

此T取定后，又不妨设（必要时把P'缩小)：对每一$\alpha<\omega_1$都有$T\subseteq T_\alpha$。

（8）以下将归纳地构作G的一个可数纯子群光滑链$\{A_\alpha|\alpha<\omega_1\}$及一个严格递增的函数$f:\omega_1\to\omega_1$使适合下列三条件：

(8·1) $T\subseteq A_0$。

(8·2) 对每一$\alpha<\omega_1$，$T_{f(\alpha)}\subseteq A_{\alpha+1}$。

(8·3) 对每一$\alpha<\omega_1$，$A_{\alpha+1}/A_\alpha$是Σ-循环的.

（9）如果(8)能作到，则由每个A_α都是G的纯子群及引理8可得

$$A_{\alpha+1}=A_\alpha\oplus L_\alpha,\ (\alpha<\omega_1).$$

再令$A=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}A_\alpha$，则易见$A=A_0\oplus(\bigoplus\limits_{\alpha<\omega_1}L_\alpha)$是$G$的一个$\Sigma$-循环纯子群，它含有一切$T_{f(\alpha)}$(由$f$严格递增知这是不可数多个$T_{f(\alpha)}$.)。这样，(5·2) 即已证明.

(10) 现在构作（8）中所说的光滑链及函数f.

设$\beta<\omega_1$，并设对一切$\alpha<\beta$已经定义了适合条件的诸A_α以及$f(\alpha)$，其中只有当β为后继序数$\gamma+1$时，$f(\gamma)$尚未定义.

(10·1) 若β为极限序数，令$A_\beta=\bigcup\limits_{\alpha<\beta}A_\alpha$，而$f(\beta)$等到构作$A_{\beta+1}$时再定义.

(10·2) 若β为后继序数，设$\beta=\gamma+1$。

由G为ω_1-可分知A_γ能被包括在G的一个可数直和项C中，设$G=C\oplus K$。

把A_γ扩张为C的一个基本子群B，则易见B可表示为$B=A_\gamma\oplus H$。

(10·2·1) 令$\delta=\sup\limits_{\alpha<\gamma} f(\alpha)$，则存在不可数多个$\alpha$适合$\delta<\alpha<\omega_1$。现在证明，其中必存在一个$\alpha$能使$((T_\alpha+B)/B)\cap(C/B)$只含$G/B$的零元。

假若不然，则对每个$\delta<\alpha<\omega_1$，存在一$x_\alpha\in T_\alpha\cap C$且$x_\alpha\notin B$。但$C$为可数，故必存在一个$c\in C$能对不可数多个$\alpha>\delta$有$x_\alpha=c$。从而，对这些$\alpha$而言，有

$$T+\langle c\rangle=T+\langle x_\alpha\rangle\subseteq T_\alpha,$$

但由(7)知T对于性质(i)为极大，故必

$$T+\langle c\rangle=T\subseteq A_0\subseteq A_\gamma\subseteq B,$$

从而$c\in B$。也即(对这些α) $x_\alpha\in B$，与上述的$x_\alpha\notin B$矛盾。

现在，任意取定一个适合$\delta<\alpha<\omega_1$及$((T_\alpha+B)/B)\cap(C/B)=\{0\}$的$\alpha$(由以上知存在)，改记为$\mu$，并令$f(\gamma)=\mu$。

(10·2·2) 考虑$(T_\mu+B)/B$中任一非零元$x+B$。由$G=C\oplus K$知$x=c+k(c\in C,\ k\in K)$。又由μ的取法可知$x\notin C$，所以$k\neq0$。

注意C/B为可除群，并且易见$(K+B)/B\cong K$而K为可分，所以，$x+B=(c+B)+(k+B)$在$G/B=(C/B)\oplus((K+B)/B)$中的高度有限。

但$(T_\mu+B)/B$为有限群，故由引理9易知，存在G的子群A'，它包括$T_\mu+B$，并且A'/B是G/B的一个有限直和项。

任意取定这样一个A'，并定义$A_{\gamma+1}=A'$。

(10·2·3) 易见B是G的纯子群，从而$A_{\gamma+1}$也是G的纯子群。

又由$A_{\gamma+1}$的定义可得$A_{\gamma+1}=B\oplus L$，其中L为一有限群。再由B的取法有$A_{\gamma+1}=A_\gamma\oplus H\oplus L$，所以$A_{\gamma+1}/A_\gamma\cong H\oplus L$是$\Sigma$-循环的(注意$H\subseteq C$)。

此外，还有$T_{f(\gamma)}=T_\mu\subseteq A_{\gamma+1}$。

至此，就完成了（8）中所说的光滑链及函数 f 的归纳定义。

（11）由以上可知，（5·2）已经证明．根据（5.2），就不难仿照第一章引理20的证明步骤证明（5·1）也成立．所以，P 适合c.c.c.，再由（4）及（1）即知本定理成立．　　　　证毕

定理11　*在 $MA(\omega_1)$ 之下，存在基数为 ω_1 的Crawley群 A，它不是 Σ-循环的。*

证明　由定理5，10及7即知。

参 考 文 献

〔1〕R.Warfield, Pacific J.Math., 52(1974), 289-304.

〔2〕C.Megibben, Pacific J.Math.,107(1983), 205-212.

〔3〕P.Crawley, Pacific J.Math., 22(1967), 235-239.

〔4〕P.Hill and C. Megibben, Math. Ann., 175(1968), 159-168.

〔5〕R.Nunke, Symposia Math., 13(1974), 315-330.

〔6〕F.Richman, Arch. der Math.,21(1970), 449-454.

〔7〕R.Jensen, Ann. Math. Logic, 4(1972), 229-308

〔8〕L.Fuchs, Infinite Abelian Groups, Academic Press, New York and London, vol I (1970), vol II (1973).

〔9〕P.Hill, Michigan Math. J., 18(1971), 187-192.

〔10〕A.H.Mekler and S.Shelah, Pacific J.Math., 121 (1986), 121—132.

〔11〕A.H.Mekler and S.Shelah, Pacific J.Math., 121 (1986), 133—134.

第三章　一个同调代数的独立性结果及其应用

S. Shelah〔1〕证明了Whitehead问题相对于ZFC的独立性（见第一章）之后，P.C.Eklof对Shelah所用的方法作了推广，在〔2〕中给出了同调代数中关于某些环A上的模的函子Ext_A的一类独立性结果。作为其应用，并由此得出了关于可换群的一系列独立性结果。

本章只就可换群的情况介绍〔2〕中的主要结果，并且只限于可换群的基数$\leqslant\omega_1$的情况（基数更大时与此基本上类似）。

设C，A为可换群，C的基数为ω_1，A的基数$\leqslant\omega_1$。如果存在C的ω_1-过滤$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$（其定义见第二章）能适合（i）$\mathrm{Ext}(C_0, A)=0$及（ii）对一切$\nu<\omega_1$都有$\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}/C_\nu, A)=0$。则在ZFC中可以证明必有$\mathrm{Ext}(C, A)=0$（见以下定理1）。

现在问：反之如何？Eklof证明了，这一问题是独立于ZFC的。他得到了下列结果：一方面，在$V=L$之下，设C，A为可换群，C的基数为ω_1，A的基数$\leqslant\omega_1$。如果$\mathrm{Ext}(C, A)=0$，则存在C的ω_1-过滤$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$能适合上述的（i）及(ii)（见以下定理12）。另一方面，在$MA(\omega_1)$之下，存在基数为ω_1的可换群C及可数可换群A，适合$\mathrm{Ext}(C, A)=0$，而C的任何ω_1-过滤$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$都不能同时适合上述的（i）及（ii）（见以下定理15）。

本章给出上述结果的证明，并在§4选述〔2〕中由此得到的关于可换群的另一些独立性结果。

§1 预备知识

定理1 设C，A为可换群，C的基数为ω_1。如果存在C的ω_1-过滤$\Gamma=\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$适合（i）$\mathrm{Ext}(C_0, A)=0$及（ii）对每一$\nu<\omega_1$，$\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}/C_\nu, A)=0$。则$\mathrm{Ext}(C, A)=0$。

证明 （1）考虑任一正合列

$$0\to A\xrightarrow{\lambda}B\xrightarrow{\pi}C\to 0$$

以下将超限归纳地定义一个递增系列的同态映射$\rho_\nu: C_\nu\longrightarrow B$ $(\nu<\omega_1)$使对每个ν都有$\pi\rho_\nu=1_{C_\nu}$。有此之后，再令$\rho=\bigcup\limits_{\nu<\omega_1}\rho_\nu$，

即有$\pi\rho=1_C$。

（2）设$\mu<\omega_1$且设对一切$\nu<\mu$已经定义了适合条件的ρ_ν。

（2·1）若μ为极限序数，令$\rho_\mu=\bigcup\limits_{\nu<\mu}\rho_\nu$即可。

（2·2）若$\mu=\nu+1$。则由归纳假设可知有$\mathrm{Ext}(C_\nu, A)=0$。再由题设的$\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}/C_\nu, A)=0$可得$\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}, A)=0$。

另外，由$\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}/C_\nu, A)=0$可知，由包入映射所导出的映射$\mathrm{Hom}(C_{\nu+1}, A)\to\mathrm{Hom}(C_\nu, A)$是到上的。

现在，任取对于$\pi|\pi^{-1}(C_{\nu+1})$的一个分裂同态$\sigma: C_{\nu+1}\to B$（由$\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}, A)=0$知$\sigma$存在），再令$\theta$：$C_\nu\to A$为适合

$$\lambda\theta=\rho_\nu-(\sigma|C_\nu)$$

的唯一的同态映射。则由以上可知，θ可以扩张为一个由$C_{\nu+1}$到A的同态映射ψ。

现在令
$$\rho_{\nu+1}=\sigma+\lambda\psi$$

则易见$\rho_{\nu+1}$即合所求。　　　　证毕

引理2 设可换群C，A适合$\mathrm{Ext}(C, A)=0$，则对C的每一子群C'也有$\mathrm{Ext}(C', A)=0$。

证明略去，见〔2〕引理1·1。

引理3 设可换群C_1，A适合$\mathrm{Ext}(C_1, A)=0$；C_0是C_1的子群并且$\mathrm{Ext}(C_1/C_0, A)\neq 0$。若

$$0\to A\xrightarrow{\lambda_0}B_0\xrightarrow{\pi_0}C_0\to 0$$

为一正合列，并且$\rho_0: C_0\to B_0$是π_0的一个分裂同态；则存在B_0的扩群B_1及一个可换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda_0} & B_0 & \xrightarrow{\pi_0} & C_0 & \to & 0 \\ & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda_1} & B_1 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 & \to & 0, \end{array}$$

（其中α为恒等映射；β，γ为包入映射）使得：ρ_0不能扩张为π_1的分裂同态。

证明略去，见〔2〕引理1·3。

引理4 设C，A为可换群，C的基数为ω_1。如果存在C的ω_1-过滤$\{D_\nu|\nu<\omega_1\}$能使

$$S=\{\nu<\omega_1|\mathrm{Ext}(D_{\nu+1}/D_\nu, A)\neq 0\}$$

是ω_1的平稳子集，则C的任何ω_1-过滤$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$都不适合定理1中的(ii)。

证明 （1）任取C的ω_1-过滤$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$。我们先证明，存在一个正规函数$f: \omega_1\to\omega_1$能使对每一$\nu<\omega_1$都有$C_{f(\nu)}=D_{f(\nu)}$。

设$\mu<\omega_1$，并设对一切$\nu<\mu$已经定义了适合条件的$f(\nu)$。

(1·1) 若μ为一极限序数，令$f(\mu)=\sup\{f(\nu)|\nu<\mu\}$。

(1·2) 若$\mu=\nu+1$。先归纳地取诸序数$\nu<\sigma(n)<\omega_1$，$(n<\omega)$，使适合

$$C_{\sigma(2k)}\subseteq D_{\sigma(2k+1)}\subseteq C_{\sigma(2k+2)}, \quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

（由ω_1的正则性知此可能）。然后令$f(\mu)=\sup\{\sigma(n)|n<\omega\}$。

由归纳假设及ω_1-过滤的光滑性易见，无论在(1·1)或(1·2)，都有$C_{f(\mu)}=D_{f(\mu)}$。

f的超限归纳定义至此完成。易见f是正规函数。

（2）因S是ω_1的平稳子集，所以存在$\mu<\omega_1$能使$f(\mu)\in S$，

即$\mathrm{Ext}(D_{f(\mu+1)}/D_{f(\mu)}, A)\neq 0$。由此及引理2有$\mathrm{Ext}(D_{f(\mu+1)}/D_{f(\mu)}, A)\neq 0$，从而$\mathrm{Ext}(C_{f(\mu+1)}/C_{f(\mu)}, A)\neq 0$。

（3）假若$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$适合定理1中的（ii），则易证对任何$\nu<\mu<\omega_1$都有$\mathrm{Ext}(C_\mu/C_\nu, A)=0$（可以对$\mu$归纳证明。考虑$C_\mu/C_\nu$的过滤$\{C_\tau/C_\nu|\nu<\tau\leqslant\mu\}$，证仿定理1.）这显然与（2）矛盾。　　证毕

定义　设A为一无扭可换群，若A中一切非0元的型（type）都相同，则称A为**齐性的**（homogeneous)(关于型的定义，可参看〔3〕，§85.)。

定义　设t为一型，A为一可换群。以$R(t)$记（唯一的）型为t的1秩（rank one）无扭群。如果$\mathrm{Ext}(R(t), A)=0$，则称型t为**A-可容许**的（A-admissible)(关于秩的定义，可参看〔3〕，§16.)。

定义　设A为一可换群。以Q记有理数加群。如果$\mathrm{Ext}(Q, A)=0$，则称A为**余有扭**的（cotorsion)。

定义　设A为一无扭可换群。如果A的每个可数子集都能被包括在A的一个可数的完全可分解的（completely decomposable）直和项中，则称A为**ω_1-可分**的（ω_1-separable）。

定义　设A为一无扭可换群。如果A的每个可数子集都能被包括在A的一个可数的完全可分解的ω_1-纯子群中，则称A为**弱ω_1-可分**的。

注　无扭可换群A称为**完全可分解**的，如果A是一些1秩群的直和。又：可换群A的子群B称为**ω_1-纯子群**，如果对A的每一子群A'之适合$B\subseteq A'\subseteq A$且A'/B为可数者，B都是A'的直和项。

引理5　设A为一无扭可换群。若B为A的纯子群且适合以下两条件

（i）A/B完全可分解且为齐性的，其型为t。

(ii) $A\setminus B$中每个元的型都为t.

则B是A的直和项。

证明略去，可参看〔3〕定理86.5。

引理6 设A为一完全可分解的齐性可换群，其型为t。并设B是A的子群，也是齐性的且型为t。则B是完全可分解的。

证明略去，可参看〔3〕定理86.6。

引理7 设A为一有限秩的完全可分解的齐性可换群。则A的每一纯子群都是A的直和项。

证明略去，可参看〔3〕定理86.8。

引理8 设$\mu<\omega_1$为一极限序数，$\{A_\nu|\nu<\mu\}$为一光滑的自由可换群链，适合下列条件

(i) 对任何$\nu+1<\sigma<\mu$，$A_\sigma/A_{\nu+1}$为自由群。

令$A_\mu=\bigcup\limits_{\nu<\mu}A_\nu$，并令

$$E_\mu=\{\lambda<\mu|\lambda\text{为极限序数并且}A_{\lambda+1}/A_\lambda\text{不为自由群}\}$$

如果E_μ不是μ的平稳子集，则：A_μ为自由群；并且对任何$\nu+1<\mu$，$A_\mu/A_{\nu+1}$也是自由群（μ的平稳子集的定义仿ω_1的平稳子集。）。

证明 因E_μ不是μ的平稳子集，易知存在μ的一个无界闭子集$C=\{\rho_n|n<\omega\}$不与E_μ相交（所谓闭子集是指在μ的序拓扑下。）不妨设诸ρ_n严格递增。

考虑$\{A_\nu|\nu<\mu\}$的子链$\{A_{\rho_n}|n<\omega\}$。由C的闭性易知它也是一个光滑链，又由C的无界性可知$A_\mu=\bigcup\limits_{n<\omega}A_{\rho_n}$。

由C与E_μ不相交及(i)易知，对任何$n<m<\omega$，A_{ρ_m}/A_{ρ_n}都是自由群。从而易见A_μ是自由群。又易见对每个$n<\omega$，A_μ/A_{ρ_n}也是自由群。再利用C的无界性及(i)即知，对任何$\nu+1<\mu$，$A_\mu/A_{\nu+1}$也是自由群。

证毕

引理9 存在一个可数自由可换群的光滑链$\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$能使：(a) 对任何$\nu+1<\mu<\omega_1$，$A_{\nu+1}$是A_μ的直和项。并且(b) 对每一极限序数$\sigma<\omega_1$，$A_{\sigma+1}/A_\sigma\cong Q$（$Q$为有理数加群。）。

证明 超限归纳地定义诸A_ν如下。

（1）令$A_0=Z$（整数加群）。

（2）设$\mu<\omega_1$，并设对一切$\nu<\mu$已经定义了适合条件的$\{A_\nu|\nu<\mu\}$。

（2·1）若μ为极限序数，令$A_\mu=\bigcup\limits_{\nu<\mu}A_\nu$。

显然A_μ可数。另外，令

$$E=\{\nu<\omega_1|\nu\text{为极限序数}\},$$

则易见$E\cap\mu$不是μ的平稳子集。又由归纳假设可知，对于$\{A_\nu|\nu<\mu\}$而言，$E\cap\mu$就是引理8中的E_μ，故由该引理可知：A_μ是自由群；并且对任何$\nu+1<\mu$，$A_\mu/A_{\nu+1}$也是自由群，从而$A_{\nu+1}$是A_μ的直和项。所以，此时$\{A_\nu|\nu<\mu+1\}$也适合（a）及（b）。

（2·2）若$\mu=\delta+1$并且δ不是极限序数。此时，令$A_\mu=A_\delta\oplus Z$。则A_μ是可数自由群，并且易见$\{A_\nu|\nu<\mu+1\}$适合(a)及(b)。

（2·3）若$\mu=\lambda+1$并且λ是极限序数。

（2·3·1）仿照引理8的证法易知，在λ中可以选取一个严格递增的序数列$\{\rho_n|n<\omega\}$使$A_\lambda=\bigcup\limits_{n<\omega}A_{\rho_n}$，并且对任何$n<m<\omega$，$A_{\rho_m}/A_{\rho_n}$都是自由群。以$\overline{A}_n$记$A_{\rho_n}$，以下将考虑群链$\{\overline{A}_n|n<\omega\}$。

（2·3·2）考虑Q。它不是自由群，但能表为一个自由群F对于一子群B的商群，并可设F与B的秩均为ω。从而有$F=\bigoplus\limits_{n<\omega}Z_n$，其中每个$Z_n\cong Z$。

对每个$n<\omega$，令$F_n=\bigoplus\limits_{i<n}Z_i$，并令$B_n=F_n\cap B$。注意有

$$F/B_n=(F_n/B_n)\oplus(\bigoplus_{i\geq n}Z_i),$$

及
$$F_n/B_n\cong(F_n+B)/B\subseteq F/B.$$

由此可知F_n/B_n是自由群（因$(F_n+B)/B$为有限生成而$F/B\cong Q$的有限生成的子群都是自由的），从而F/B_n也是自由群。

（2·3·3）对每个$n<\omega$，令$\overline{B}_n=\overline{A}_0\oplus B_n(\overline{B}_0=\overline{A}_0)$。

以下将归纳定义一个严格递增的自然数列$\{a_n|n<\omega\}$及一系

列同构映射f_n：$\bar{B}_{a_n}\to\bar{A}_n$，使对任何$n<m<\omega$都有$f_n\subseteq f_m$。

(2·3·3·1) 令$a_0=0$，并令f_0：$\bar{B}_0(=\bar{A}_0)\to\bar{A}_0$为恒等映射。

(2·3·3·2) 设$n<\omega$，并设对每一$i\leqslant n$已经定义了适合条件的a_i及f_i，考虑$m=n+1$。

令a_m为最小的自然数l之使"B_l/B_{a_n}的秩$=\bar{A}_m/\bar{A}_n$的秩"者。这样的l存在，因为：对每个$j<\omega$，B_{j+1}/B_j的秩$\leqslant 1$；$\bar{A}_m/\bar{A}_n$的秩$<\omega$；并且B/B_{a_n}的秩为ω。此外，由$\bar{A}_m/\bar{A}_n$的秩$\geqslant 1$可知$a_m>a_n$。

由于B_{a_m}/B_{a_n}与$\bar{A}_m/\bar{A}_n$秩相同且易见均为自由群，所以f_n可以扩张为一同构映射f_m：$\bar{B}_{a_m}\to\bar{A}_m$。

(2·3·4) 由$\{a_n|n<\omega\}$严格递增可知对每个$n<\omega$都有$n\leqslant a_n$故有

$$\bigcup_{n<\omega}B_{a_n}=\bigcup_{n<\omega}B_n=B\cap(\bigcup_{n<\omega}F_n)=B\cap F=B,$$

并且

$$\bigcup_{n<\omega}f_n:\bar{A}_0\oplus B\to A_\lambda$$

是一同构映射。

(2·3·5) 现在，选取$A_{\lambda+1}$为一个具有如下性质的可数自由群：$A_{\lambda+1}\supseteq A_\lambda$并且$\bigcup_{n<\omega}f_n$能扩张为一同构映射

$$f:\bar{A}_0\oplus F\to A_{\lambda+1}$$

(易见这样的$A_{\lambda+1}$存在。)

(2·3·6) 由上可知，$A_{\lambda+1}/A_\lambda\cong F/B\cong Q$。但对每个$n<\omega$，$A_{\lambda+1}/\bar{A}_n\cong F/B_{a_n}$是自由的。

对任何$\nu+1<\mu$，存在$n<\omega$能使$A_{\nu+1}\subseteq\bar{A}_n$。又由归纳假设可知$\bar{A}_n/A_{\nu+1}$是自由的，再由上述可知$A_{\lambda+1}/A_{\nu+1}$是自由的，从而$A_{\nu+1}$是$A_{\lambda+1}=A_\mu$的直和项。

所以，$\{A_\nu|\nu<\mu+1\}$适合 (a) 及 (b)。

(3) $\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$的归纳定义至此完成，显见它是一个适合 (a) 及 (b) 的可数自由可换群的光滑链。　　证毕

注　引理 8 与引理 9 取材于〔4〕。

§2 在$V=L$下的肯定答案

引理10 在$V=L$之下，设集合X，Y的基数均为ω_1，并设$\Gamma_X=\{X_\nu|\nu<\omega_1\}$与$\Delta_Y=\{Y_\nu|\nu<\omega_1\}$各为$X$与$Y$的$\omega_1$-过滤。如果$S$是$\omega_1$的一个平稳子集，则存在一系列函数$\{f_\nu:X_\nu\to Y_\nu|\nu\in S\}$使得：对每一函数$g$：$X\to Y$，都存在$\nu\in S$能使$g|X_\nu=f_\nu$。

证明略去，参看〔5〕。我们也可以把它自身看作一条与ZFC相对和谐的新公理。

引理11 在$V=L$之下，设C，A为可换群，C的基数为ω_1，A的基数$\leqslant\omega_1$。如果存在C的ω_1-过滤$\Gamma_C=\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$能使

$$S=\{\nu<\omega_1|\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}/C_\nu,\ A)\neq 0\}$$

为ω_1的平稳子集，则$\mathrm{Ext}(C,A)\neq 0$。

证明 （1）若存在$\nu<\omega_1$使$\mathrm{Ext}(C_\nu,A)\neq 0$，则由引理2即得本引理的结论。以下设诸$\mathrm{Ext}(C_\nu,\ A)=0$ $(\nu<\omega_1)$。

（2）以下将超限归纳地定义一系列正合列

$$E_\nu:\ 0\to A\xrightarrow{\lambda_\nu}B_\nu\xrightarrow{\pi_\nu}C_\nu\to 0,\quad(\nu<\omega_1)$$

使适合：(i) B_ν的元素集为$C_\nu\times A$，$(\nu<\omega_1)$。并且(ii)对任何$\mu\leqslant\nu<\omega_1$都有如下的可换图

$$(D)\left\{\begin{array}{l}E_\mu:\ 0\to A\xrightarrow{\lambda_\mu}B_\mu\xrightarrow{\pi_\mu}C_\mu\to 0\\ \qquad\qquad\ \ \downarrow\alpha\qquad\ \ \downarrow\beta\qquad\ \ \downarrow\gamma\\ E_\nu:\ 0\to A\xrightarrow{\lambda_\nu}B_\nu\xrightarrow{\pi_\nu}C_\nu\to 0\end{array}\right.$$

其中α为恒等映射而β，γ均为包入映射。

（3）任取A的一个ω_1-过滤$\Delta_A=\{A_\nu|\nu<\omega_1\}$，并令

$$\{f_\nu:C_\nu\to C_\nu\times A_\nu|\nu\in S\}$$

为由引理10所给出的一系列函数（以C，$C\times A$各作为X、Y，以

Γ_C，$\Gamma_C\times\Delta_A$各作为Γ_X，Δ_Y）。现在定义诸E_ν。

E_0可任意取定。

设$\tau<\omega_1$，并设对一切$\mu<\tau$都已定义了适合条件的E_μ。

（3·1）若τ为极限序数，令E_τ为（在明显意义下）诸E_μ（$\mu<\tau$）的并。

（3·2）若$\tau=\nu+1$并且：或$\nu\notin S$或f_ν不是π_ν的分裂同态。此时，可令E_τ为E_ν的任一扩张之使图（D）（以ν，τ作为μ，ν）为可换者。

（3·3）若$\tau=\nu+1$并且$\nu\in S$并且f_ν是π_ν的分裂同态。此时，利用引理3可得E_ν的一个扩张E_τ使得：f_ν不能扩张为π_τ的分裂同态。

另外，通过基数的考虑，易见在以上各情况都可取E_τ使其中B_τ的元素集为$C_\tau\times A$。

（4）现在，令

$$E:\ 0\to A\xrightarrow{\lambda}B\xrightarrow{\pi}C\to 0$$

为诸$E_\nu(\nu<\omega_1)$的并。则B的元素集为$C\times A$。

假若存在π的分裂同态$g:C\to B$，则由$\{f_\nu|\nu\in S\}$的取法可知存在$\nu\in S$能使$g|C_\nu=f_\nu$。对于此ν，显然$g|C_\nu=f_\nu$是π_ν的一个分裂同态，并且它能扩张为$\pi_{\nu+1}$的一个分裂同态$g|C_{\nu+1}$。但这与（3）中$E_{\nu+1}$的定义矛盾。

所以，不存在π的分裂同态，从而$\mathrm{Ext}(C, A)\neq 0$。　　证毕

定理12　在$V=L$之下，设C，A为可换群，C的基数为ω_1，A的基数$\leqslant\omega_1$。如果$\mathrm{Ext}(C, A)=0$，则存在C的ω_1-过滤$\Gamma=\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$能使（i）$\mathrm{Ext}(C_0, A)=0$，并且（ii）对每个$\nu<\omega_1$都有$\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}/C_\nu, A)=0$。

证明　（1）任取C的一个ω_1-过滤$\Delta=\{D_\nu|\nu<\omega_1\}$（易知其存在）。令

$$E=\{\nu<\omega_1|存在\nu<\mu<\omega_1使\mathrm{Ext}(D_\mu/D_\nu, A)\neq 0\}.$$

（2）令$g:\omega_1\to\omega_1$为一个适合下列条件的正规函数（g的正规性是指：g为严格递增并且对每一极限序数$\lambda<\omega_1$都有$f(\lambda)=\bigcup_{\nu<\lambda}f(\nu)$。）：对每一$\nu<\omega_1$，如果$g(\nu)\in E$，则

$$\mathrm{Ext}(D_{g(\nu+1)}/D_{g(\nu)},\ A)\neq 0.$$

（易见g存在）。

（3）令$F_\nu=D_{g(\nu)}$，（$\nu<\omega_1$）。则易见$\{F_\nu|\nu<\omega_1\}$也是C的ω_1-过滤。再令

$$S=\{\nu<\omega_1|\mathrm{Ext}(F_{\nu+1}/F_\nu,\ A)\neq 0\},$$

则由引理11知S不是ω_1的平稳子集。所以，存在一个正规函数h：$\omega_1\to\omega_1$其象集不与S相交。

（4）现在令f：$\omega_1\to\omega_1$为$f(\nu)=g(h(\nu))$，则f仍为一正规函数。再令$C_\nu=D_{f(\nu)}$，（$\nu<\omega_1$），则C的ω_1-过滤

$$\Gamma=\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$$

即合所求。因：由引理2知（i）成立。又易见当$h(\nu)\notin S$时有$f(\nu)\notin E$，所以（ii）也成立。 证毕

§3 在$MA(\omega_1)$下的否定答案

引理13 在$MA(\omega_1)$之下，设A，B为两个集合，其中A的基数为ω_1，又设P为一族由A到B内的部份函数（即：每个函数的定义域都是A的一个子集），并且适合下列性质：

（i）对每一$a\in A$及每一$f\in P$，存在$g\in P$使$f\subseteq g$并且$a\in\mathrm{dom}(g)$。

（ii）对P的每个不可数子集P'，存在f_1，$f_2\in P'$及$f_3\in P$使$f_1\neq f_2$并且$f_1\subseteq f_3$，$f_2\subseteq f_3$。

则存在一函数g：$A\to B$能使：对A的每一有限子集F，存在$f\in P$使$F\subseteq\mathrm{dom}(f)$并且$g|F=f|F$。

这就是第一章的引理17。证明见该处。

定理14 在$MA(\omega_1)$之下，设A为一可数可换群，G为一基数为ω_1的弱ω_1-可分齐性可换群，其型为t。则$\mathrm{Ext}(G, A)=0$的充分必要条件是：t为A-可容许的。

证明 条件的必要性易见，以下证充分性。设t为A-可容许的。

（1）考虑任一正合列

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\pi} G \to 0$$

令 $P=\{f: H \to B \mid H\text{为}G\text{的有限秩纯子群并且}\pi f=1_H\}$。

以下将证明，P适合引理13中的性质（i），（ii）。从而由该引理知存在一函数g：$G \to B$能使：对G的每一有限子集F，$g|F$都被包括在P的某一元f中。由此即易见g为一同态映射并且适合$\pi g=1_G$，从而上述正合列是分裂的。

（2）现在证性质（i）。任取$a \in G$及P中一元f：$H \to B$。以H'记$H \cup \{a\}$在G中的纯闭包。由G为弱ω_1-可分可知，H'能被包括在G的一个完全可分解的子群中，从而由引理6可知H'自身是完全可分解的。又由于H'也是有限秩且为齐性的，故由引理7可知H是H'的直和项。由此即易见，f可以扩张为一同态映射f'：$H' \to B$使适合$\pi f'=1_{H'}$，从而$f' \in P$。并且显然有$a \in \mathrm{dom}(f')$。

（3）以下开始证性质（ii）。任意取定P的一个不可数子集P'，不妨设其基数为ω_1。

（3·1）我们先提出下列事实（其证明见（3·2））。

（*）存在P'的不可数子集$\bar{P}$及G的纯子群$\bar{G}$能使：$\bar{G}$为完全可分解，并且$\bar{P}$中每一元的定义域都被包括在$\bar{G}$中。

根据（*），把$\bar{G}$分解为$\bar{G}=\bigoplus_{i \in I} R_i$，其中每一$R_i$都是型为$t$的1秩群。把$\bar{P}$记为$\{f_\nu \mid \nu<\omega_1\}$，其中每个$f_\nu$的定义域记为$H_\nu$。

仿照（2），可以把每个f_ν扩张为P中一个元，其定义域为一直和$\bigoplus_{i \in I_\nu} R_i$，其中$I_\nu$为$I$的一个有限子集。所以，不妨设$H_\nu$自

身已经是这种形状。

另外，由于可数个可数集的并仍为可数，所以又不妨设（必要时把$\bar{P}$缩小为一不可数子集）：存在一正整数 n，使每个I_ν都恰含 n 个元素。由此又易见，存在 I 的子集 J，它被包括在不可数多个I_ν中，并且J对于此性质是极大的。

又由于A为可数，易知只能有可数多个由 $\bigoplus_{i\in J} R_i$ 到A的函数能被包含在P中（注意P中的f适合条件 $\pi f = 1_{\mathrm{dom}(f)}$）。所以，又不妨假设（必要时再把$\bar{P}$缩小为一不可数子集）：对任何$\mu$，$\nu<\omega_1$，都有$J\subseteq I_\mu\cap I_\nu$及$f_\nu\mid\bigoplus_{i\in J} R_i = f_\mu\mid\bigoplus_{i\in J} R_i$。

现在，利用J的极大性可知，如果$i\in I_0 - J$，则只有可数多个ν能使$i\in I_\nu$。故必存在$\nu\neq 0$能使$I_0\cap I_\nu = J$。我们令$H=\bigoplus\{R_i|i\in I_0\cup I_\nu\}$，则可依自然方式定义$g$：$H\to B$使适合$g\mid\bigoplus_{i\in I_0} R_i = f_0$且$g\mid\bigoplus_{i\in I_\nu} R_i = f_\nu$。所以性质（ii）成立。

（3·2）现在补证（*）。我们仍把P'记为$\{f_\nu|\nu<\omega_1\}$，其中f_ν的定义域为H_ν。

仿上可知（必要时把P'缩小），存在G的纯子群G_0，它被包括在不可数多个H_ν中，并且G_0对此性质为极大。由引理7可知，G_0是这些H_ν的直和项，设$H_\nu = G_0\oplus H'_\nu$。

以下将超限归纳地定义G的一个可数子群光滑链$\{G_\nu|\nu<\omega_1\}$及一系列递增的序数$\{\tau_{\nu+1}|\nu<\omega_1\}$使适合：每个$G_\nu$都是$G$的完全可分解的纯子群；每个$G_\nu$都是$G_{\nu+1}$的直和项；并且每个$H_{\tau_{\nu+1}}\subseteq G_{\nu+1}$。

有此之后，再令 $\bar{G}=\bigcup_{\nu<\omega_1} G_\nu$及$\bar{P}=\{f_{\tau_{\nu+1}}|\nu<\omega_1\}$，即易见（*）成立。

设$\mu<\omega_1$并设已经定义了适合条件的$\{G_\nu|\nu<\mu\}$及$\{\tau_\nu|\nu<\mu\}$。

（3·2·1）若μ为极限序数，令 $G_\mu=\bigcup_{\nu<\mu} G_\nu$即可。

(3·2·2) 若$\mu=\nu+1$。任意取定G的一个可数的ω_1-纯子群C之适合$G_\nu\subseteq C$者（由G为弱ω_1-可分知C存在）。

再任意取定一个序数$\tau_{\nu+1}<\omega_1$使适合：对一切$\rho<\nu$都有$\tau_{\rho+1}<\tau_{\nu+1}$，并且$H'_{\tau_{\nu+1}}\cap C=\{0\}$（这样的$\tau_{\nu+1}$存在，因为：否则由$C$为可数易知存在$c\in C$及不可数多个$\tau<\omega_1$能使$c\in H'_\tau$，从而$G_0\cup\{c\}$在$G$中的纯闭包$G'_0$被包括在与这不可数多个$\tau$相应的$H_\tau$中，但这与取$G_0$时的极大性矛盾）。

现在，令G_μ为$G_\nu+H'_{\tau_{\nu+1}}$在G中的纯闭包。

为了说明这一归纳步骤，不难看出，我们只需再证明G_ν是G_μ的直和项即可。

考虑典型映射φ：$G_\mu/G_\nu\to G/C$。易见φ是1-1的，所以G_μ/G_ν同构于$\varphi(G_\mu/G_\nu)$。由C的取法以及G为弱ω_1-可分可知，$\varphi(G_\mu/G_\nu)$被包括在G/C的一个可数的完全可分解子群D中，并且D是齐性的，其型为t。所以，$\varphi(G_\mu/G_\nu)$中每一非0元相对于$\varphi(G_\mu/G_\nu)$的型$\leqslant t$。另一方面，由于同态映射使型不减小，所以$\varphi(G_\mu/G_\nu)$中每一非0元的型$\geqslant t$。综上可知，$\varphi(G_\mu/G_\nu)$是齐性的且其型为t。对D及$\varphi(G_\mu/G_\nu)$应用引理6，可知$\varphi(G_\mu/G_\nu)$是完全可分解的。从而，G_μ/G_ν也是完全可分解的，并且是齐性的，其型为t。故由引理5可知G_ν是G_μ的直和项。　证毕

定理15　在$MA(\omega_1)$之下，设A是一个非余有扭的可数可换群，t是一个A-可容许的型。则存在一个基数为ω_1的无扭可换群C，它是齐性的，其型为t，适合$\mathrm{Ext}(C,A)=0$。但C的任何ω_1-过滤都不能同时适合定理1中的(i)与(ii)。

证明　(1) 首先，我们可以仿照引理9的构作，超限归纳地定义一个光滑群链$\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$，使其中每个C_ν都是型为t的完全可分解可数可换群，并且具有下列性质：

(1·1) 对任何$\nu+1<\mu<\omega_1$，$C_{\nu+1}$是C_μ的直和项。

(1·2) 对每一极限序数$\sigma<\omega_1$，$C_{\sigma+1}/C_\sigma$同构于有理数加群

Q（引理9的构作相当于$t=(0, 0, 0, \cdots)$的情况。）。

（2）令 $C=\bigcup_{\nu<\omega_1} C_\nu$。则易见$C$为弱$\omega_1$-可分，故由定理14知$\mathrm{Ext}(C, A)=0$。

（3）考虑C的ω_1-过滤$\Gamma=\{C_\nu|\nu<\omega_1\}$，并令

$$S=\{\nu<\omega_1|\mathrm{Ext}(C_{\nu+1}/C_\nu, A)\neq 0\},$$

则易见S为一切小于ω_1的极限序数所成的集，故为ω_1的平稳子集。从而由引理4可知，C的任何ω_1-过滤都不能同时适合定理1中的(i)与(ii)。 证毕

§4 一些进一步的独立性结果

利用§2及§3中的结果，可以进一步得到一些关于可换群的独立性结果，现在举例如下。(证明略去)

定理16 （1）在$V=L$之下，若可换群A的基数为ω_1并且$\mathrm{Ext}(A, Z)=0$，则A是自由群。(Z为整数加群)

（2）在$MA(\omega_1)$之下，存在基数为ω_1的可换群A，它适合$\mathrm{Ext}(A, Z)=0$，但A不是自由群。

这就是第一章的主要结论。

定义 设A为一可换群。如果A适合下列二条件，则称为ω_1-**余可分**的(ω_1-coseparable)：(i)A是ω_1-自由的(即A的每一可数子群都是自由的)。(ii)对A的每一子群B，若A/B可数，则B含有一个直和项C能使A/C可数。

定理17 （1）在$V=L$之下，若可换群A的基数为ω_1并且是ω_1-余可分的，则A是自由群。

（2）在$MA(\omega_1)$之下，存在基数为ω_1的可换群A，它是ω_1-余可分的，但A不是自由群。

证明见[2]定理4·3。

定义 设A为一可换群．如果A适合下列二条件，则称为**完全ω_1-可分的**：（i）A是ω_1-自由的．（ii）A的每个子群都是ω_1-可分的．

定理18 （1）在$V=L$之下，存在基数为ω_1的可换群A，它是ω_1-自由且ω_1-可分的，但A不是完全ω_1-可分的．

（2）在$MA(\omega_1)$之下，若可换群A的基数为ω_1并且是ω_1-自由且ω_1-可分的，则A是完全ω_1-可分的．

证明见〔2〕定理4.5．

定义 设A为一可换群。如果对一切可数的周期（torsion）可换群T都有$\mathrm{Ext}(A, T)=0$，则称A为一ω_1-**Baer群**．

定理19 （1）在$V=L$之下，若可换群A的基数为ω_1并且是ω_1-Baer群，则A是自由群．

（2）在$MA(\omega_1)$之下，存在基数为ω_1的可换群A，它是ω_1-Baer群，但A不是自由群．

证明见〔2〕定理4·6．

参考文献

〔1〕S. Shelah, Israel Jour. Math., 18 (1974), 243-256.

〔2〕P. C. Eklof, Trans. Amer. Math. Soc., 227 (1977), 207-225.

〔3〕L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, Vols Ⅰ, Ⅱ, Academic Press, New York and London, 1970, 1973.

〔4〕P. C. Eklof, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 65-72.

〔5〕R. Jensen, Ann. Math. Logic, 4 (1972), 229-308.

第四章　箱积的仿紧性

拓扑空间的乘积$\prod_{i\in I} X_i$可以赋予多种拓扑，箱拓扑（box topology）是最自然的一种；它是由形如$\prod_{i\in I} u_i$的集作为拓扑基所形成的拓扑，其中u_i是X_i中的开集，实际上，早在1923年H.Tietze就引进了这种拓扑（见〔1〕）；而通常的Tychonoff乘积拓扑是在1930年由Tychonoff引入的.但是箱拓扑在保持拓扑性质的能力方面实在太差了，因此很快被Tychonoff拓扑的研究所代替.可以说，几近半个世纪，箱积拓扑的研究处在婴儿阶段，70年代初，情况才发生变化，而且箱积的研究的起步一开始就借助于近代集论的附加公理；没有这一工具几乎寸步难行.

箱积拓扑能保持T_2，T_3，和$T_{3\frac{1}{2}}$的分离性；即当每个X_i具有这些分离性时，赋予箱积拓扑的积空间$\prod_{i\in I} X_i$也具有这些分离性，但不能保持T_4分离性，即不能保持正规性（normality）.也恰恰在这一点上引起人们极大的兴趣.正规性问题以及与其紧密相关的仿紧性（paracompactness）问题首先是由A.H.Stone在20多年前提出的（见〔2〕）.直到1972年，M.E.Rudin证明了，在CH(Continuum Hypothesis)下，可数个紧度量空间之箱积是仿紧的（〔3〕）；这是首篇破冰之作，之后，围绕相关问题，K.Kunen、van Douwen等人作了不少工作.总的说来，现在所知道的正面结果都是相容性的结果；而且都以证明仿紧性作为先导；因仿紧性蕴含正规性.人们的注意力似乎一直集中在下述两个问题之间：可数个紧度量空间（或第一可数空间等）之箱积，至少是最简单的紧空间$\omega+1$之可数次箱积的仿紧性是否在ZFC（Zermelo-Fraenkel公理体系＋Choice公理)中绝对地成立？

是否存在某个箱积$\square_{i<\omega} X_i$，其中X_i都是紧的第一可数空间而$\square_{i<\omega} X_i$却不是正规的？这一存在性是否与ZFC相容？

本章尽可能地阐明所需的拓扑概念并给出一些重要的拓扑学命题的证明，以方便读者。

§1 拓扑预备知识

拓扑空间是指由一集合X，和X中的子集族$\mathscr{Q}$所组成的二元对$(X, \mathscr{Q})$．它们满足下述条件：（1）$\phi \in \mathscr{Q}$，$X \in \mathscr{Q}$；（2）若$u_1 \in \mathscr{Q}$，$u_2 \in \mathscr{Q}$则$u_1 \cap u_2 \in \mathscr{Q}$；（3）若$\mathscr{A} \subset \mathscr{Q}$则$\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{Q}$．$\mathscr{Q}$就称为$X$上的**拓扑**；$\mathscr{Q}$中的元称为$X$的开子集(open subset)。

子族$\mathscr{B} \subset \mathscr{Q}$若满足下述条件就称为拓扑空间（$X$，$\mathscr{Q}$）的**基**(base)：（1）对任意的$u_1$，$u_2 \in \mathscr{B}$和任意的点$x \in u_1 \cap u_2$，存在$u \in \mathscr{B}$，使$x \in u \subset u_1 \cap u_2$；（2）对任一$x \in X$，存在$u \in \mathscr{B}$，使$x \in u$。

拓扑空间$(X, \mathscr{Q})$常简称为空间X。空间的分离性质罗列如下。

T_1空间　空间中任意两个不同的点x_1，x_2，存在开集u使$x \in u$，$x_2 \notin u$。

Hausdorff空间（T_2空间）空间中任意两个不同的点x_1, x_2，存在开集u_1，u_2使$x_1 \in u_1$，$x_2 \in u_2$而$u_1 \cap u_2 = \phi$。

正则空间（regular space，即T_3空间）　T_1空间且对任意的点x和任意不含x的闭集F，存在开集u_1，u_2使$x \in u_1$，$F \subset u_2$而$u_1 \cap u_2 = \phi$。

完全正则空间（completely regular space，即$T_{3\frac{1}{2}}$空间）T_1空间且对任意的点x和任意不含x的闭集F，存在连续函数f：$X \to I = [0, 1]$使$f(x) = 0$，$f(y) = 1$对每个$y \in F$成立。

正规空间（normal space，即T_4空间）T_1空间且对空间中任意两个不交的闭集F_1，F_2，存在开集u_1，u_2使$F_1\subset u_1$，$F_2\subset u_2$而$u_1\cap u_2=\phi$。

离散空间（discrete space）单点集$\{x\}$皆为开集的空间。

显然，$T_{3\frac{1}{2}}\Rightarrow T_3\Rightarrow T_2\Rightarrow T_1$。事实上，蕴涵式$T_4\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$也是对的；这就是著名的Uryson引理。

Uryson引理 设X是T_4空间，A，B是X中不相交的闭集。则存在连续函数f：$X\to I$使

$$f(x)=0,\ x\in A;\ f(x)=1,\ x\in B.$$

此引理的证明可见〔4〕1.5.10。

乘积$\prod\limits_{i\in I}X_i$的Tychonoff拓扑 以形如$\prod\limits_{i\in I}u_i$的集为基的拓扑，其中只有有限个u_i是X_i中之真开集，除这有限个外$u_i=X_i$。

乘积$\prod\limits_{i\in I}X_i$的箱积拓扑 以形如$\prod\limits_{i\in I}u_i$的集为基的拓扑，其中每个u_i都是X_i中的开集。以箱积拓扑为拓扑的乘积空间$\prod\limits_{i\in I}X_i$称为**箱积空间**，记作$\square_{i\in I}X_i$。如果每个X_i都是相同的空间X，则简记作$\square^I X$。

本章中涉及的拓扑空间都是非离散的完全正则空间；涉及的箱积空间$\square_{i\in I}X_i$的指标集I皆有$|I|\geqslant\omega$。

命题1 设π_j：$\square_{i\in I}X_i\to X_j$为到$X_j$之射影（projection）；即满足$\pi_j(\langle x_i:i\in I\rangle)=x_j$之映射。则$\pi_j$是连续的开映射（open mapping）；即对$\square_{i\in I}X_i$中的任一开集$u$，像$\pi_j(u)$是$X_j$中之开集。

事实上，任取$y\in\pi_j(u)$；则存在$x\in u$，使$y=\pi_j(x)$。因u是$\square_{i\in I}X_i$之开集，存在x之开邻域不妨设为一基集$\prod\limits_{i\in I}u$使$\prod\limits_{i\in I}u_i\subset u$，其中$u_i$为$X_i$中之开集。显然$\pi_j(\prod\limits_{i\in I}u_i)=u_j\subset\pi_j(u)$。因$y\in u_j$而$u_j$是$X_j$中之开集，故$y$是$\pi_j(u)$之内点。这就说明$\pi_j(u)$为$X_j$中之开集。至于$\pi_j$之连续性，则从等式$\pi_j^{-1}(u)=u\times\prod\limits_{i\neq j}X_i$便可看出，其中$u$是$X_j$中的开集。

命题2 设$F_i \subset X_i$，$i \in I$。$\prod_{i\in I} F_i$是$\square_{i\in I} X_i$中之闭子集的充要条件为对每个$i\in I$，F_i是X_i中之闭集。

从下述等式可知命题为真。

$$\square_{i\in I} X_i \setminus \prod_{i\in I} F_i = \bigcup_{j\in I} [(X_j \setminus F_j) \times \prod_{i\neq j} X_i].$$

命题3 $\square_{i\in I} X_i$是$T_1(T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}})$空间之充要条件为对每个$i\in I$，$X_i$是$T_1(T_2,\ T_3,\ T_{3\frac{1}{2}})$空间。

证 只证明T_2，$T_{3\frac{1}{2}}$两种情形，其它情形留给读者，必要性的证明又较容易，下面证这两种情形下的充分性。

设x，$y\in \square_{i\in I} X_i$，$x\neq y$。必存在$j\in I$，使$x_j\neq y_j$，其中$x_j=\pi_j(x)$，$y_j=\pi_j(y)$。由于$X_j$是$T_2$的，存在$X_j$中的开集$u_{j1}$，$u_{j2}$使$x_j\in u_{j1}$，$y_j\in u_{j2}$而$u_{j1}\cap u_{j2}=\phi$。从而$W_1=\pi_j^{-1}(u_{j1})$，$W_2=\pi_j^{-1}(u_{j2})$这两个$\square_{i\in I} X_i$中之开集将能分离$x$，$y$；由于$u_{j1}\cap u_{j2}=\phi$，显然$W_1\cap W_2=\phi$。这说明$\square_{i\in I} X_i$是$T_2$的。

现设$x\in \square_{i\in I} X_i$而$F$是$\square_{i\in I} X_i$中不含$x$的闭集。由于$x$属于开集$\square_{i\in I} X_i\setminus F$，故存在开基集$u=\prod_{i\in I} u_i$（$u_i$是$X_i$中之开集）使$x\in u$，而$u\cap F=\phi$。对于每个$u_i\subset X_i$，由于$X_i$是$T_{3\frac{1}{2}}$的，故存在连续函数$f_i: X_i\to[0,\ 1]$，使$f_i(x_i)=0$，$f(z)=1$，$z\in X_i\setminus u_i$。令$f: X\to [0,\ 1]$按下述公式定义：

$$f(y)=\sup\{f_i(y_i): i\in I\},\quad y\in \square_{i\in I} X_i.$$

$f(x)=0$是显然的；对于$y\in F$，由于$F\cap u=\phi$，故必存在$i\in I$，使$y_i\notin u_i$，于是$f_i(y_i)=1$，从而$f(y)=1$。剩下只要证明f是连续函数就可以了；也就是要证明$[0,\ 1]$中的任一开集之原像是$\square_{i\in I} X_i$中之开集。由于$[0,\ 1]$中开集之基是由形如$[0,\ a)$，$(a,\ 1]$，$(a,\ b)$的区间所组成，其中$0<a$，$b<1$。因此只要证明$f^{-1}[[0,\ a)]$，$f^{-1}[(a,\ 1]]$，$f^{-1}[(a,\ b)]$等集是开集就可以了。下面证明$f^{-1}[[0,\ a)]$是开集，其余留给读者。

任取$z\in f^{-1}[[0,\ a)]$，则$f(z)<a$。由f之定义可知$f_i(z_i)<a-\varepsilon$，$i\in I$，其中ε是小于$a-f(z)$之正数。由于f_i连续，可知存

在z_i之开邻域V_i使

$$f_i(h)<a-\varepsilon,\ h\in V_i.$$

$V=\prod_{i\in I}V_i$是z的邻域。从而应有

$$z\in\prod_{i\in I}V_i\subset f^{-1}[[0,\ a)];$$

因为每个$y\in\prod_{i\in I}V_i$，应有$f_i(y_i)<a-\varepsilon$，从而$f(y)\leqslant a-\varepsilon<a$。这说明$z$是$f^{-1}[[0,\ a)]$之内点，于是可断定$f^{-1}[[0,\ a)]$是开集。

证毕

§2 箱积空间的基本性质

对于Tychonoff拓扑来说，有一个重要的性质，即下述定理。

Tychonoff 定理 设$\prod_{i\in I}X_i$是赋予Tychonoff拓扑的乘积空间。$\prod_{i\in I}X_i$是紧空间的充分必要条件为每个X_i都是紧空间。

众所周知，这个定理是与选择公理（Axiom of Choice）等价的。证明可见[4]3.2.4.

对于箱积空间，相应的结果是不成立的；不仅不是紧，连局部紧也不成立。所谓**局部紧**空间，是指对空间的每个点x，存在x的开邻域u，$\bar{u}$是紧子空间。

定理4 $\square_{i\in I}X_i$不是局部紧的。

证 在$\square_{i\in I}X_i$中择定点$p=\langle p_i:i\in I\rangle$，使每个$p_i$都不是$X_i$的孤立点（我们已在篇首声明，本章中所涉及的空间是非离散的完全正则空间，因此在X_i中必存在非孤立的点）。再给定p点的一个开邻域$G=\prod_{i\in I}G_i$，G_i是X_i中之开集。因p_i是非孤立点，故存在$x_i\in G_i\setminus\{p_i\}$。又因$X_i$是$T_3$的，故存在开集$H_i$使

$$x_i\in H_i\subset\overline{H}_i\subset G_i\setminus\{p_i\}.$$

显然，集$A=\prod_{i\in I}(\{x_i\},\ \{p_i\})$是$\square_{i\in I}X_i$中的一个闭集，这从命题2便可知道。又由于$|I|\geqslant\omega$，所以$A$是不可数的。令

$$\mathscr{C}=\{\prod_{i\in I}K_i:K_i\in\{H_i,\ G_i\setminus\overline{H}_i\}\}.$$

则$\mathscr{C}$是A的一个两两不交的开复盖，因而$\mathscr{C}$不存在有限的子复盖，这说明A不是紧的．$A\subset G$，这说明$\bar{G}$不是紧的；否则紧空间的闭子集仍应是紧的，G是任意给定的p点的开邻域；$\bar{G}$不是紧的说明$\square_{i\in I} X_i$不是局部紧的．　　　　证毕

从上述定理的证明中，还可看出$\square_{i\in I} X_i$不是可分的(separable）也不是第一可数的（first-countable）．所谓**可分空间**是指存在可数的稠子集的空间．所谓**第一可数空间**是指空间中的每个点x都存在可数的邻域基（base for X at the point x）．点x的**邻域基**是x的一个开邻域族$\mathscr{B}(x)$．它满足：对包含x的任一开集都存在$u\in\mathscr{B}(x)$，使$u\subset V$．

定理5　$\square_{i\in I} X_i$不是可分的．

事实上，$\square_{i\in I} X_i$中存在二二不交的不可数的开集族$\mathscr{C}$（见定理4的证明）．因此不可能存在可数的稠子集．

定理6　$\square_{i\in I} X_i$不是第一可数的．

设p是定理4证明中涉及的点p．任取p的可数个邻域V_k，$k<\omega$；不失一般性，可设$V_k=\prod_{i\in I} V_{ki}$，$V_{ki}$是$X_i$中之开集．我们来证明$\{V_k:k<\omega\}$不可能成为$p$点的邻域基．事实上，不妨考虑$|I|=\omega$之情形，为简便计可设$I=\omega$．因为$p_i$不是$X_i$中的孤立点，因此可假定

$$V_{ki}\subset\bigcap_{h<k} V_{hi},\quad i<\omega,$$

于是当令$V=\prod_{k<\omega} V_{kk}$时，任何一个$V_k$都不能包含在$V$中．

在$|I|=\omega$的情形，对于Tychonoff乘积空间$\prod_{i\in I} X_i$，当X_i都是可分空间时，$\prod_{i\in I} X_i$仍是可分空间；当X_i都是第一可数空间时，$\prod_{i\in I} X_i$仍是第一可数空间．因此定理5、6也是箱积空间不同于普通乘积空间的特性．

对于Tychonorf乘积空间，当每个X_i是正规空间时，乘积$\prod_{i\in I} X_i$不一定是正规的；即不能保持正规性．箱积的情形如何呢？下面给出两个反例说明箱积的保持性更差；甚至当每个X_i都

是紧空间时，也不能保持正规性.

van Douwen反例（见〔5〕或〔6〕） 这一反例说明可数个可分度量空间的箱积可以不是正规空间.

无理数空间（普通拓扑）与乘积 $\underset{(T)}{{}^{\omega}\omega}$ （Tychonoff 拓扑）是同胚的（homeomorphic）这里我们采用了表示 ω 映射到 ω 的一切映射组成之族的符号 ${}^{\omega}\omega$；读者不难看出可以把 ${}^{\omega}\omega$ 看作乘积 $\prod_{i<\omega} X_i$，$X_i=\omega$。由于同胚关系，我们可用 $\underset{(T)}{{}^{\omega}\omega}$ 表示无理数空间. 考察箱积空间

$$X=(\underset{(T)}{{}^{\omega}\omega})\times(\square^{\omega}(\omega+1)).$$

以及 X 中的两个集合

$$A=\{(x,\ x):x\in{}^{\omega}\omega\},\quad B=\underset{(T)}{{}^{\omega}\omega}\times(\square^{\omega}(\omega+1)\setminus\underset{(\square)}{{}^{\omega}\omega}).$$

其中 $\underset{(\square)}{{}^{\omega}\omega}$ 表示作为箱积 $\square^{\omega}(\omega+1)$ 的子空间 ${}^{\omega}\omega$. A，B 都是 X 中之闭集，且 $A\cap B=\phi$. 事实上，拿 A 来说，如果 $y\notin A$,则 $y=(x,\ z)$，$x\neq z$. 如果 $z\in\underset{(\square)}{{}^{\omega}\omega}$，$z=\langle z_i:i<\omega\rangle$，因 $z_i<\omega$，因此 $\{z_i\}$ 便是因子空间 $\omega+1$ 中之开集. 若令 $u=u_1\times\prod_{i<\omega}\{z_i\}$ （u_1 是 $\underset{(T)}{{}^{\omega}\omega}$ 中 x 之开邻域）则 $u\cap A=\phi$. 如果 $z\in\square^{\omega}(\omega+1)\setminus\underset{(\square)}{{}^{\omega}\omega}$，则令 $u=u_1\times u_2$；u_1 是 $\underset{(T)}{{}^{\omega}\omega}$ 中 x 之开邻域，$u_2=\prod_{i<\omega}〔x_i+1,\ \omega〕$ 是 $\square^{\omega}(\omega+1)$ 中 z 的开邻域，应有 $u\cap A=\phi$. 以上说明 $y=(x,\ z)$ 不是 A 的聚点（accumulation point）；因此 A 为闭集. 同样可证明 B 也是 X 中之闭集；证明留给读者. $A\cap B=\phi$ 则是显然的.

下面证明 A，B 不能开集分离；设 V 是包含 B 的任一开集，往证 $A\cap\overline{V}\neq\phi$. 对每个 $n=1,\ 2,\ \cdots$，归纳地确定 $f_n\in{}^{\omega}\omega$ 如下：设 f_i，$i<n$，都已确定，则令

$$w_n=\langle f_0(0),\ f_0(1)+f_1(1),\ \cdots,\ \sum_{i<n}f_i(n-1),0,0,\cdots\rangle,$$
$$y_n=\langle f_0(0),\ f_0(1)+f_1(1),\ \cdots,\ \sum_{i<n}f_i(n-1),\ \omega,\omega,\cdots\rangle.$$

由于 $(w_n,\ y_n)\in B$，存在 $f_n\in{}^{\omega}\omega$ 使

$$\{w_n\}\times(\{f_0(0)\}\times\cdots\times\{\sum_{i<n}f_i(n-1)\}\times〔f_n(n),\omega〕\times$$
$$\times〔f_n(n+1),\ \omega〕\times\cdots)\subset V$$

若令$x=\langle f_0(0),\ f_0(1)+f_1(1),\cdots,\sum_{i<n} f_i(n),\cdots\rangle$，则

$$(x,\ x)\in H\cap\bar{V}.$$

下面证明无理数空间$\boldsymbol{Z}$与$\underset{(T)}{\omega_\omega}$同胚。

同递归方法构作一族以有理数为端点的实数开区间；记该族为$G=\{u_{n_0n_1\cdots n_k}: n_i<\omega(i<k),\ k<\omega\}$并满足下述要求：

（1）对每个$k<w$，和每一组$\langle n_0,n_1,\ \cdots,n_{k-1}\rangle\in\prod_{i<k} X_i$，$X_i=\omega$，$\{u_{n_0n_1\cdots n_{k-1}}n_k: n_k<\omega\}$是可数个首尾相接元最左和最右元的开区间；即所有$u_{n_0k_1\cdots n_{k-1}n_k}$的端点集$D_k$与整数集序同胚。且

$$\bigcup_{n_k<\omega} u_{n_0n_1\cdots n_{k-1}n_k}=u_{n_0n_1\cdots n_{k-1}}\setminus D_k$$

特别是当$k<1$时，

$$\bigcup_{k_0<\omega} u_{n_0}=\boldsymbol{R}\setminus D_0.$$

显然当满足这一要求时，对任何k，有

〈Ⅰ〉$u_{n_0n_1\cdots n_{k-1}n_k}\subset u_{n_0n_1\cdots n_{k-1}}$

〈Ⅱ〉$u_{n_0n_1\cdots n_{k-k}n'_k}\cap u_{n_0n_1\cdots n_{k-1}n''_k}=\phi,n'_k\neq n''_k$.

（2）$u_{n_0n_1\cdots n_k}$的长度$|u_{n_0n_1\cdots n_k}|\leqslant\frac{1}{2^k}$.

（3）$\bigcup_{k<\omega} D_k=Q$，Q为全体有理数；$D_k\cap D_h=\phi$，$k\neq h$.

读者可以验证满足上述要求的开区间族G是可以作出的，并有下述事实成立。

事实1　对任意的$k=1,\ 2,\ \cdots$,

$$\boldsymbol{Z}\subset\bigcup\{u_{n_0n_1\cdots n_{k-1}n_k}: k<\omega\}$$

事实2　对任意的$\langle n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots\rangle\in\omega_\omega$，$\bigcap\{u_{n_0n_1\cdots n_k}: k<\omega\}$是一个无理数组成之单点集，记作$x_{n_0n_1\cdots n_k\cdots}$.

令$f:\underset{(T)}{\omega_\omega}\to Z$是由等式$f(\langle n_0n_1\cdots n_k\cdots\rangle)=x_{n_0n_1\cdots n_k\cdots}$确定的函数.$f$是一对一的，这是显然的事实，下面证明$f$是连续的开映射.

设$u\subset {}^{\omega}\omega$是开子集，往证$f(u)$是$\boldsymbol{Z}$中之开集，不妨只讨论$u$是形如$\{n_j\}\times\prod_{i\neq j}X_i$，$n_j\in X_j$，$X_i=\omega\ (i<\omega)$的开基集的情形；因为${}^{\omega}\omega$的开基集可以是由形如$\prod_{j\in J}\{n_j\}\times\prod_{i\notin J}X_i(X_i=\omega(i\notin J))$，$n_j\in X_j$，$X_j=\omega$，$j\in J$而$J\subset\omega$为有限集）的集所组成。事实上，

$$f(u)=(\bigcup\{u_{n_0n_1\cdots n_{j-1}n_j}:\langle n_0,n_1,\cdots,n_{j-1}\rangle\in\prod_{i<j}X_i,\ X_i=\omega\})\cap\boldsymbol{Z},$$

因而是$\boldsymbol{Z}$中之开集。

再设V是$\boldsymbol{Z}$中之开集，不妨只讨论V是形如$(c,d)\cap\boldsymbol{Z}(c,d$为有理数）之情形。设$c\in D_k$，$d\in D_h$而$h<k$。此时

$$f^{-1}(u)=\bigcup\{\prod_{j<k}\{n_j\}\times\prod_{i<k}X_i:X_i=\omega\ (i>k),\ u_{n_0n_1\cdots n_k}\subset(c,d)\}$$

显然$f^{-1}(u)$是${}^{\omega}_{(T)}\omega$中之开集。

Kunen反例（见〔7〕） 这一反例说明可数个紧空间之箱积可以不是正规的。

令$X={}^{c^+}2$。这是Tychonoff乘积空间，因而是紧空间；下面证明$\square^{\omega}X$不是正规的。

令$D=\{\langle x,x,\cdots\rangle:x\in{}^{c^+}2.\}$。只要证明$D$作为$\square^{\omega}X$之闭子集不是正规的，则$\square^{\omega}X$就不是正规的了。

（1）用$X^{(\delta)}$记赋予G_δ拓扑的空间X(以空间X中可数个开集之交为基的拓扑称为G_δ拓扑）。则D与$X^{(\delta)}$同胚（homeomorphic）。事实上令$d(\langle x,x,\cdots\rangle)=x$，$x\in{}^{c^+}2$。则$d:D\to X^{(\delta)}$便是一同胚映射，读者不难验证这一点。

（2）既然D与$X^{(\delta)}$同胚，可把D看作Tychonoff乘积${}^{A}2$而赋予G_δ拓扑的空间$({}^{A}2)^{(\delta)}$，其中$|A|=c^+$。现令$A=(c^+\times\omega)\cup[c^+]^2$，其中$[c^+]^2$表示$c^+$中2元集组成之族。因为$|A|=c^+$，因此可认为$D=({}^{A}2)^{(\delta)}$。

（3）令$A_\gamma=(\gamma\times\omega)\cup[\gamma]^2$，$\pi_\gamma:{}^{A}2\to{}^{(A_\gamma)}2$是投影映射。

Engelking和Kartowicz在〔8〕中证明了：如果u，v是$({}^{A}2)^{(\delta)}$中两个不交的开集，则存在$\nu<c^{+}$，使

$$\pi_{\nu}(u)\cap\pi_{\nu}(v)=\phi.$$

我们把这一结果的证明编录于后，供有兴趣的读者参阅。

现在应用以上结果来证明$D=({}^{A}2)^{(\delta)}$不是正规的。设$f\in{}^{A}2$，$\alpha<c^{+}$，令$f_{\alpha}:\omega\to 2$是由下式定义的函数：$f_{\alpha}(n)=f(\alpha,n)$。再定义

$$H=\{f\in{}^{A}2:\alpha<\beta<c^{+}\text{且}f_{\alpha}=f_{\beta}\Rightarrow f(\{\alpha,\beta\})=0\},$$

$$K=\{f\in{}^{A}2:\alpha<\beta<c^{+}\Rightarrow f(\{\alpha,\beta\})=1\}.$$

H，K是D中不交的开集．事实上，如果$f\notin H$，则存在α，$\beta\in c^{+}$，使$f_{\alpha}=f_{\beta}$而$f(\{\alpha,\beta\})=1$。取f在D中的一个邻域u如下：u是${}^{A}2$中的G_{δ}集：

$$u=\bigcap_{n<\omega}(\{f_{\alpha}(n)\}\times\{f_{\beta}(n)\}\times\{f(\{\alpha,\beta\})\}\times\prod_{\gamma\in B_{n}}E_{\gamma}),$$

其中 $E_{\gamma}=2$，$B_{n}=A\setminus\{\langle\alpha,n\rangle,\langle\beta,n\rangle,\{\alpha,\beta\}\}$。显然，如果$g\in u$，则$g_{\alpha}=f_{\alpha}$，$g_{\beta}=f_{\beta}$而$g(\{\alpha,\beta\})=1$；故$g\notin H$，即$u\cap H=\phi$。以上说明$H$是闭集；同理可说明$K$也是闭集。$H\cap K=\phi$也是明显的；因${}^{\omega}2$总共只有$c$个而$f_{\alpha}$共有$c^{+}$个，因此如果存在$f\in H\cap K$，必存在不同的$\alpha_{0},\beta_{0}\in c^{+}$使$f_{\alpha_{0}}=f_{\beta_{0}}$。从$f\in H$可推知$f(\{\alpha_{0},\beta_{0}\})=0$；从$f\in K$可推知$f(\{\alpha_{0},\beta_{0}\})=1$，导至矛盾；可知$H\cap K=\phi$。

如果D是正规的，则必存在不交的开集u，v分离H和K。据(3)，知存在$\gamma<c^{+}$使

$$\pi_{\gamma}(u)\cap\pi_{\gamma}(v)=\phi. \qquad (1)$$

另一方面，如果$\gamma<c^{+}$，则必可找到一个$f\in{}^{A}2$，用f_{α}，$\alpha<\gamma$，是互不相同的且使$f(\{\alpha,\ \beta\})=1$对一切α，$\beta<\gamma$都成立．这样，对于这个f，它既有$f\in\pi_{\gamma}(H)$，因为对一切α，$\beta<\gamma$，有$f_{\alpha}\neq f_{\beta}$；又有$f\in\pi_{\gamma}(K)$，因为对一切α，$\beta<\gamma$，$\alpha\neq\beta$都有$f(\{\alpha,\beta\})=1$。

这就是说

$$\pi_\nu(H)\cap\pi_\nu(K)\neq\phi$$

这与上面的（1）式是矛盾的.

Engelking-Kartowiez定理 设X_s，$s\in S$，都是重度(weight) 不超过c的拓扑空间（空间X的重度$W(X)=\min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}$为$X$之拓扑基$\}$），$u$，$v$为$\prod_{s\in S}X_s$中两个不交的$G_{\delta\Sigma}$集（$G_{\delta\Sigma}$集意为任意多个$G_\delta$集之并），则必存在子集$S_0\subset S$，$|S_0|\leqslant c$，使

$$\pi_{S_0}(u)\cap\pi_{S_0}(v)=\phi,$$

这里π_{S_0}: $\prod_{s\in S}X_s\to\prod_{s\in S_0}X_s$为投影.

这个定理的证明主要依赖于下述两个有趣的集论引理.

Erdös-Rado引理 若$\mathscr{C}$是集族；每个$C\in\mathscr{C}$都有$|C|\leqslant\gamma$. 又设对$\mathscr{C}$的每个拟不交子族 (quasi-disjoint subfamily) $\mathscr{C}_0$，皆有$|\mathscr{C}_0|\leqslant\beta$，$\beta$为无限基数，则$|\mathscr{C}|\leqslant\beta^\gamma$.

这里说$\mathscr{C}_0$是$\mathscr{C}$的**拟不交子族**是指$\forall C_1$，$C_2\in\mathscr{C}_0$，总有$C_1\cap C_2=\cap\mathscr{C}$.

证 令τ为基数大于γ的最小序数；即$\tau=\gamma^+$. 对每个$\nu<\tau$，构作$\mathscr{C}$的一个子族$\mathscr{C}_\nu$使满足

（a）$|\mathscr{C}_\nu|\leqslant\beta^\gamma$，对每个$\nu<\tau$成立.

（b）$\mathscr{C}=\bigcup_{\nu<\tau}\mathscr{C}_\nu$

如果上述$\mathscr{C}_\nu$，$\nu<\tau$，都已构作出来，则即可断定

$$|\mathscr{C}|\leqslant 2^\gamma\cdot\beta^\gamma=\beta^\gamma$$

为方便计，令$\mathscr{C}_{-1}=\phi$（因此$\cup\mathscr{C}_{-1}=\phi$），而从$\nu=-1$开始归纳，现在设$\mathscr{C}_\mu$，$\mu<\nu$，都已作出. 令

$$E_\nu=\bigcup_{\mu<\nu}(\cup\mathscr{C}_\mu).$$

对每个$K\subset E_\nu$，令

$$\mathscr{K}=\{C\in\mathscr{C}:C\cap E_\nu=K\}.$$

再设$\mathscr{K}^*$是$\mathscr{K}$的极大拟不交子族，也就是当S，$T\in\mathscr{K}$而$S\cap$

$T = K$时，把S，T都归入$\mathscr{K}^*$．那么

$$\bigcap \mathscr{K}^* = K.$$

最后，令

$$\mathscr{C}_\nu = \bigcup \{\mathscr{K}^* : K \subset E_\nu\},$$

下面验证这样构作出的$\{\mathscr{C}_\nu : \nu < \tau\}$满足$(a)$和$(b)$．归纳地验证$(a)$．设对一切$\mu < \nu$，$|\mathscr{C}_\mu| \leqslant \beta^\gamma$．故

$$|E_\nu| \leqslant \gamma\gamma\beta^\gamma = \beta^\gamma.$$

由此可知$\{K \subset E_\nu : |K| \leqslant \gamma\}$之基数至多是$(\beta^\gamma)^\gamma = \beta^\gamma$；再因

$|\mathscr{K}^*| \leqslant \beta^\gamma$，故知

$$|\mathscr{C}_\nu| \leqslant \beta^\gamma \beta^\gamma = \beta^\gamma.$$

下面验证(b)．如果(b)式不对，这就是说存在$C \in \mathscr{C}$使$C \notin \bigcup\limits_{\nu < \tau} \mathscr{C}_\nu$．我们可以在$C$中找到互不相同的点$x_\nu$，$\nu < \tau$；即存在子集$\{x_\nu : \nu < \tau\} \subset C$．这是不可能的，因为$|C| \leqslant \gamma$而$|\{x_\nu : \nu < \tau\}| = \tau > \gamma$．这个矛盾说明$(b)$式成立．如何找到互不相同的$x_\nu$呢？记$K_\nu = C \cap E_\nu$．对任意的$T_\nu \in \mathscr{K}^*_\nu$，取定

$$x_\nu \in C \cap (T_\nu \setminus E_\nu).$$

这里要注意$C \cap (T_\nu \setminus E_\nu) \neq \phi$；因若$C \cap (T_\nu \setminus E_\nu) = \phi$，则有$C \cap T_\nu = K_\nu$，这样$\mathscr{K}^* \cup \{C\}$仍为拟不交子族而与$\mathscr{K}^*$的极大性矛盾．再看当$\mu < \nu < \tau$时，

$$x_\mu \in T_\mu \subset \bigcup \mathscr{C}_\nu \subset E_\nu$$

而$x_\nu \notin E_\nu$，从而可知$x_\mu \neq x_\nu$．　　　　证毕

这个引理可见〔16〕；但这里的证明是由Michael给出的（〔17〕）．另一个集论引理如下．

Engelking-Kartowiez引理　设$\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$为两个集族满足如下条件：对每个$A \in \mathscr{U}$，$B \in \mathscr{V}$都是$|A| \leqslant \gamma$，$|B| \leqslant \beta$，其中$\gamma \leqslant \beta$，两者皆为无限基数．如果

$$A \cap B \neq \phi,\ A \in \mathscr{U},\ B \in \mathscr{V},$$

则必存在N，$|N|\leqslant\beta^{\gamma}$，使

$$A\cap B\cap N\neq\phi,\quad A\in\mathscr{U},\quad B\in\mathscr{V}.$$

证 设$\mathscr{U}$已被良序化，其序为$\leqslant$.记

$$\mathscr{V}^*=\{T\subset\bigcup\mathscr{U}:\ T\cap B\neq\phi\text{对一切}B\in\mathscr{V}\text{成立}\},$$ 对每

个$A_0\in\mathscr{U}$，集族

$$\mathscr{U}(A_0)=\{A\in\mathscr{U}:A\cap A_0\in\mathscr{V}^*\}$$

是非空的，因为至少$A_0\in\mathscr{U}(A_0)$.用A_0^*记$\mathscr{U}(A_0)$中关于良序$\leqslant$的第一个元，而令

$$T_{A_0}=A_0\cap A_0^*.$$

显然对$A\in\mathscr{U}$有$T_A\in\mathscr{V}^*$。

设A_1，$A_2\in\mathscr{U}$且$T_{A_1}\cap T_{A_2}\in\mathscr{V}^*$. 则

$$T_{A_1}\cap T_{A_2}=A_1\cap A_1^*\cap A_2\cap A_2^*=(A_2^*\cap A_1)\cap(A_1^*\cap A_2)$$

因此

$$T_{A_1}\cap T_{A_2}\in\mathscr{V}^*\Rightarrow A_1^*=A_2^*.\tag{1}$$

事实上，由$T_{A_1}\cap T_{A_2}\in\mathscr{V}^*$可知

$$A_2^*\cap A_1\in\mathscr{V}^*,\quad A_1^*\cap A_2\in\mathscr{V}^*,$$

因而

$$A_2^*\in\mathscr{U}(A_1),\quad A_1^*\in\mathscr{U}(A_2),$$

从而得$A_1^*\leqslant A_2^*$，$A_2^*\leqslant A_1^*$；即$A_1^*=A_2^*$.

令

$$\mathscr{C}=\{T_A:A\in\mathscr{U}\}.$$

而设$\mathscr{C}_0$是$\mathscr{C}$中任一极不交子族。下面分两种情形讨论.

（I）$\bigcap\mathscr{C}_0\in\mathscr{V}^*$.

当T_{A_1}和T_{A_2}是$\mathscr{C}_0$中两个不同的元时，

$$T_{A_1}\cap T_{A_2}=\bigcap\mathscr{C}_0$$

据（1）式，可知存在$A_0\in\mathscr{U}$使

$$T_A=A\cap A_0,\quad T_A\in\mathscr{C}_0,$$

由此可断定

$$\bigcup \mathscr{C}_0 \subset A_0.$$

因为$|A_0| \leqslant \gamma \leqslant \beta$，所以$|\mathscr{C}_0| \leqslant \beta$.

（Ⅱ） $\bigcap \mathscr{C}_0 \notin \mathscr{V}^*$；即存在$B_0 \in \mathscr{V}$使$\bigcap \mathscr{C}_0 \cap B_0 = \phi$.

因为$T_A \cap B_0 \neq \phi$对一切$T_A \in \mathscr{C}_0$成立，故

$$(T_A \setminus \bigcap \mathscr{C}_0) \cap B_0 \neq \phi, \quad T_A \in \mathscr{C}_0.$$

又据 $|B_0| \leqslant \beta$，而对$\mathscr{C}_0$中不同的元T_{A_1}，T_{A_2}皆有

$$(T_{A_1} \setminus \bigcap \mathscr{C}_0) \cap (T_{A_2} \setminus \bigcap \mathscr{C}_0) = \phi,$$

便可断定$|\mathscr{C}_0| \leqslant \beta$.

以上说明在任何情况下皆有$|\mathscr{C}_0| \leqslant \beta$，这样当我们令 $N = \bigcup \mathscr{C}$时，N恰好满足引理的要求。事实上，$N \cap A \cap B \neq \phi$，$A \in \mathscr{U}$、$B \in \mathscr{V}$，这一要求据$\mathscr{C}$之定义直接可知；而$|N| \leqslant \beta^r$由Erdös-Rado引理便可知道。 证毕

Engelking-Kartowiez定理的证明。

不失一般性，可设当$s \neq s'$时$X_s \cap X_{s'} = \phi$，对每个$s \in S$，选定X_s的一个拓扑基$\mathscr{B}_s$，$|\mathscr{B}_s| \leqslant c$，这样，可设

$$u = \bigcup_{t \in T} K_t, \quad v = \bigcup_{r \in R} L_r,$$

这里K_t，L_r分别为Tychonoff乘积空间$\prod\limits_{s \in S} X_s$关于$\{\mathscr{B}_s : s \in S\}$的开集基之可数交，

由于$u \cap v = \phi$，因此对一切$t \in T$和$r \in R$，有

$$K_t \cap L_r = \phi,$$

令

$$\mathscr{U} = \{A(K_t) : t \in T\},$$

$$\mathscr{V} = \{B(L_r) : r \in R\}.$$

其中

$$A(K_t) = \{K_{ts} \subset X_s : K_{ts}\text{为}\mathscr{B}_s\text{中可数个元素之交，} s \in D_t\}$$

$$B(L_r) = \bigcup_{s \in L_r} \{W_s \subset X_s : W_s\text{为}\mathscr{B}_s\text{中可数个元素之交，}$$

$$W_s \cap L_{rs} = \phi\}$$

$$K_t=\prod_{s\in S}K_{ts},\quad L_r=\prod_{s\in S}L_{rs},$$
$$D_t=\{s\in S: K_{ts}\neq X_s\},\quad D_r=\{s\in S: L_{rs}\neq X_s\}$$

显然

$$K_t\cap L_r=\phi\text{当且仅当}A(K_t)\cap B(L_r)\neq\phi$$

容易验证

$$|A(K_t)|\leqslant\omega,\quad t\in T,$$
$$|B(L_r)|\leqslant\omega\cdot c=c,\quad r\in R.$$

也就是说$\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$满足Engelking-Kartowiez 引理之条件；据该引理可知存在集合N，$|N|\leqslant c^{\omega}=c$，使

$$A(K_t)\cap B(L_r)\cap N\neq\phi,\quad t\in T,\quad r\in R.$$

令

$$S_0=\{s\in S:\text{对某个}K_t,\ t\in T,\ p_s(K_t)\in N\}$$

则可验证$\pi_{S_0}(u)\cap\pi_{S_0}(v)=\phi$。　　　　　　　　　证毕

本章一开始就提到Rudin 首先证明了可数个紧度量空间之箱积在CH下是仿紧的，从而也 是正规的。上 面两个反例说明紧与可度量这两个条件缺一，结论便不能成立。为了探究和证明正面的结果，须要一些预备知识，也在本节中阐明。

仿紧 (paracompactness)　空间X的每个开复盖$\mathscr{C}$ 都有局部有限的开加细 (refinement) $\mathscr{A}$；所谓局部有限系指对每个 $x\in X$，存在 x 的开邻域u_x使 $\{A\in\mathscr{A}:\ A\cap u_x\neq\phi\}$是有限集。所谓开加细是指：(i) $\mathscr{A}$是X的一个开复盖；(ii) 对任一 $A\in\mathscr{A}$，存在$C\in\mathscr{C}$使$A\subset C$(这一性质记作$\mathscr{A}\lhd\mathscr{C}$或$\forall A\in\mathscr{A},A\lhd\mathscr{C}$)。

定理7　空间X是仿紧的充要条件为X的任一开 复 盖$\mathscr{C}$有σ-局部有限开加细$\mathscr{A}$，所谓σ-局 部有限开加细系指：(i) $\mathscr{A}$是X的开复盖；(ii) $\mathscr{A}$可表示成可数个开集族之并，$\mathscr{A}=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{A}_n$，每个$\mathscr{A}_n$都是局部有限族且$\mathscr{A}_n\lhd\mathscr{C}$。

证　必要性是显然的，只要证充分性，分三步证明

(一) 证明$\mathscr{C}$有局部有限加细 $\mathscr{B}$ (不一定是 开 加 细)。设

$\mathscr{A}=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{A}_n$是$\mathscr{C}$的$\sigma$-局部有限开加细；再设$\mathscr{A}_n=\{A_s:s\in S_n\}$，$S=\bigcup\limits_{n<\omega}S_n$，这里，指标集$S_n$之间两两不交，对每个$s\in S_n$，令

$$B_s=A_s\setminus\bigcup_{k<n}\bigcup\mathscr{A}_k,$$
$$\mathscr{B}=\{B_s:s\in S\}.$$

下面证明$\mathscr{B}$是$\mathscr{C}$的局部有限加细。（1）由于每个$\mathscr{A}_n\lhd\mathscr{C}$，因此$\mathscr{B}\lhd\mathscr{C}$。（2）对每个$x\in X$，由于$\mathscr{A}$是$X$的开复盖，故存在$n<\omega$和$A_s\in\mathscr{A}_n$使$x\in A_s$。设$n_0$是第一个使存在$A_s\in\mathscr{A}_n$，$x\in A_s$的$n$，则$x\in B_{s_0}$。这说明$\mathscr{B}$是$X$的一个复盖。（3）对每个$x\in X$，由于每个$\mathscr{A}_n$都是局部有限的，因此有限个局部有限族之并$\bigcup\limits_{n<n_0}\mathscr{A}_n$也是局部有限的；即存在$x$的开邻域$u_x$使$\{A\in\bigcup\limits_{n<n_0}\mathscr{A}_n:A\cap u_x\neq\phi\}$是有限集。据$B_s$之定义可知$\{B_s:s\in\bigcup\limits_{n<n_0}S_n$且$B_s\cap u_x\neq\phi\}$也是有限集。但由于$x\in A_{s_0}\in\mathscr{A}_{n_0}$，$A_{s_0}$是开集；不妨设$u_x\subset A_{s_0}$，当$n>n_0$时所有的$B_s(s\in S_n)$与$A_{s_0}$之交从而与$u_x$之交必为空集。因此可知$\{B_s:s\in S$且$B_s\cap u_x\neq\phi\}$是有限集。

（二）证明$\mathscr{C}$有闭的局部有限精加细(precise refinement)，即如果记$\mathscr{C}=\{C_t:t\in T\}$则存在局部有限闭加细$\{F_t:t\in T\}$使$F_t\subset C_t$对每个$t\in T$成立，这样的加细称为精加细。

由于空间X是正则的，故对每个$x\in C_t$，存在开集u使$x\in u\subset\bar{u}\subset C_t$。因此$\mathscr{C}$有开加细$w$使$\{\overline{W}:W\in w\}$也是$\mathscr{C}$的加细。据（一），$X$的开复盖$w$有局部有限加细$\{A_i:i\in I\}$。对每个$i\in I$，择定$t(i)\in T$使$\overline{A}_i\subset C_t$，令

$$F_t=\bigcup_{t(i)=t}\overline{A}_i$$

则$\{F_t:t\in T\}$即为$\mathscr{C}$之局部有限闭精加细。事实上$\{A_i:i\in I\}$是局部有限族，因此$\bigcup\limits_{t(i)=t}\overline{A}_i=\overline{\bigcup\limits_{t(i)=t}A_i}$，即$F_t$是闭集。至于局部有限及$F_t\lhd\mathscr{C}$对一切$t\in T$成立以及$\{F_t:t\in T\}$是$X$之复盖等要求是很易验证的。

（三）证明$\mathscr{C}$有局部有限开的精加细。

设$\mathscr{A}=\{A_s: s\in S\}$是$\mathscr{C}$的局部有限加细。对每个$x\in X$，择定一邻域$V_x$使$\{s\in S: A_s\cap V_x\neq\phi\}$是有限集。据(二)开复盖$\{V_x: x\in X\}$有局部有限闭精加细$\mathscr{F}$，令

$$W_s=X\setminus\bigcup\{F\in\mathscr{F}: F\cap A_s=\phi\},$$

则W_s为开集（因$\mathscr{F}$为局部有限族，子族之并仍为闭集），$A_s\subset W_s$。下述两个性质很易验证。

(i) $W_s\cap F\neq\phi$当且仅当$A_s\cap F\neq\phi$。

(ii) 对每个$F\in\mathscr{F}$，$\{s\in S: F\cap A_s\neq\phi\}$为有限集。

对每个$s\in S$，择定$C(s)\in\mathscr{C}$使$A_s\subset C(s)$，然后令$u_s=W_s\cap C(s)$，则$\{u_s: s\in S\}$即为所求。事实上，（1）因$A_s\subset W_s\cap C(s)=u_s$，故而$\{u_s: s\in S\}$为$X$之开复盖；（2）对每个$u_s$，有$u_s\lhd\mathscr{C}$，这是显然的；（3）对每个$x\in X$，由于$\mathscr{F}$是$X$的局部有限的开复盖，故存在$x$的开邻域$u_x$使

$$|\{F\in\mathscr{F}: F\cap u_x\neq\phi\}|<\omega。\qquad（1）$$

应用性质（ii）便可知道

$$|\{s\in S: A_s\cap u_x\neq\phi\}|<\omega;\qquad（2）$$

因为$\mathscr{F}$是X之复盖，由不等式（1），可知u_x为有限个F的并，这些F又只能与有限个A_s相交，故有(2)式成立。最后据性质(i)便可知

$$|\{s\in S: W_s\cap u_x\neq\phi\}|<\omega;$$

$u_s\subset W_s$故可得$|\{s\in S: u_s\cap u_x\neq\phi\}|<\omega$，即$\{u_s: s\in S\}$局部有限。

证毕

从上面的定理证明中可以看出，$\mathscr{C}$的任何一个开加细或局部有限的开加细$\mathscr{A}$都可改造成精开加细或局部有限的精开加细；若$\mathscr{C}=\{C_s: s\in S\}$，只要对每个$u\in\mathscr{A}$，选定使$u\subset C_s$的$s=s(u)$，再令

$$u_s=\bigcup\{u\in\mathscr{A}: s(u)=s\}$$

便可以了。

定理8 空间X的开复盖若有局部有限开加细便有局部有限的精开加细。

定理9 设f：$X\to Y$是到上的（surjective）的连续闭映射（closed map）。如果X是正规空间则Y也是正规空间。

证 正规空间可用另一种方式来刻划：如果对空间Y中任意两个满足$u\cup v=Y$的开集u,v，总存在闭集$E,F\subset Y$使$E\subset u$，$F\subset v$而$E\cup F=Y$，则Y便是正规空间。

对Y中任意两个满足$u\cup v=Y$的开集u，v，易见$f^{-1}(u)\cup f^{-1}(v)=X$，且$f^{-1}(u)$，$f^{-1}(v)$是$X$中的两个开集（因$f$连续）。由于$X$正规，存在闭集$A_0,B_0\subset X$，使$A_0\subset f^{-1}(u)$，$B_0\subset f^{-1}(v)$且$A_0\cup B_0=X$。记$A=f(A_0)$，$B=f(B_0)$，因$f$为闭映射，皆为$Y$中之闭集。显然

$$A\subset ff^{-1}(u)=u,\quad B\subset ff^{-1}(v)=v;$$

$$A\cup B=f(A_0)\cup f(B_0)=f(A_0\cup B_0)=Y.$$

应用正规空间的前述刻划可知Y是正规空间。　　证毕

事实上，连续的闭映射不仅保持正规性也保持T_1，T_2和T_3性质，但不能保持$T_{3\frac{1}{2}}$性质。

定理10 设$f:X\to Y$是到上的连续闭映射。

（1）若Y仿紧，且$f^{-1}(y)$是Lindelöf的（对$f^{-1}(y)$的任一开复盖有可数的子复盖），y是Y中任一元，则X也是仿紧空间。

（2）若X仿紧则Y也仿紧。

证 首先证（1）。设$\mathscr{C}$是X的一个开复盖。因$f^{-1}(y)$是Lindelöf的，故对每个$y\in Y$，可选定$\mathscr{C}$的可数子族$\mathscr{C}_y=\{u_n^y: n<\omega\}$使$f^{-1}(y)\subset\bigcup\mathscr{C}_y$。令

$$V^y=\{z\in Y: f^{-1}(z)\subset\bigcup\mathscr{C}_y\}.$$

可以断言V^y是Y中的开集，事实上，由于f是闭映射，$f(X\setminus\bigcup\mathscr{C}_y)$是$Y$中的闭集，而

$$f(X\setminus\bigcup\mathscr{C}_y)=Y\setminus V^y.$$

这一等式可验证如下：$z\in f(X\setminus\bigcup\mathscr{C}_y)\Longleftrightarrow$存在$x\in X\setminus\bigcup\mathscr{C}_y$使$z=f(x)\Longleftrightarrow f^{-1}(z)\not\subset\bigcup\mathscr{C}_y$，即$z\in Y\setminus V^y$。

$\{V^y:y\in Y\}$是Y的开复盖，由于Y仿紧，存在局部有限的精加细$\{W^y:y\in Y\}$（应用定理8）。令$R_n=\{u_n^y\cap f^{-1}(W^y):y\in Y\}$，则$\{R_n:n<\omega\}$形成$\mathscr{C}$的$\sigma$-局部有限的开加细，据定理7知$X$是仿紧的。

下面证(2)。由于连续闭映射保持正规性，故知Y是正规空间。

设Y的开复盖$\mathscr{C}=\{u_s:s\in S\}$。不妨设指标集$S$是被某序"$<$"良序化的集合。我们可递归地定义局部有限的闭复盖$\mathscr{F}_i=\{F_{si}:s\in S\}$，$i=1,2,\cdots$，使满足下述条件：

(i) $F_{si}\subset f^{-1}(u_s)$，$s\in S$，$i=1,2,\cdots$；

(ii) $f(F_{si})\cap f(E_{si-1})=\phi$，$E_{si-1}=\bigcup\limits_{t<s}F_{ti-1}(i>1)$。

事实上，对于$i=1$，由于$\{f^{-1}(u_s):s\in S\}$是X的一个开复盖，X仿紧，故存在局部有限的开加细。再按定理7证明(二)中同样的方法，可以找到局部有限的闭精加细；这个精加细即可作为$\mathscr{F}_1=\{F_{s1}:s\in S\}$。然后再考虑$X$的开复盖

$$\mathscr{C}_2=\{f^{-1}(u_s)\setminus f^{-1}f(E_{s1}):s\in S\}$$

同样可以找到$\mathscr{C}_2$的局部有限的闭精加细$\mathscr{F}_2=\{F_{s2}:s\in S\}$。$\mathscr{F}_2$同样满足(i)(ii)两个条件。事实上，$F_{s2}\subset f^{-1}(u_s)$是显然成立的。又因$F_{s2}\subset f^{-1}(u_s)\setminus f^{-1}f(E_{s1})$，$F_{s2}\cap f^{-1}f(E_{s1})=\phi$，从而

$$f(F_{s2})\cap f(E_{s1})=\phi;$$

即(ii)也满足，归纳地便可构作出一切$\mathscr{F}_i$，$i=1,2,\cdots$。

考察开集$V_{si}=Y\setminus f(\bigcup\limits_{t\neq s}F_{ti})$。因$\{f(F_{si-1}):s\in S\}$是$Y$的复盖而$V_{si}\subset f(F_{si})$，故知

$$V_{si}\cap V_{ti}=\phi,\quad s\neq t.$$

可以断言$\mathscr{V}=\{V_{si}:s\in S,i=1,2,\cdots\}$是$Y$的一个开复盖而且是

$\mathscr{C}$的一个加细。事实上，$\mathscr{V}$是$\mathscr{C}$的一个加细是容易验证的，因为$V_{si} \subset f(F_{si})$而$F_{si} \subset f^{-1}(u_s)$。下面证明$\mathscr{V}$是$Y$的一个复盖。任取$y \in Y$，因$\{f(F_{si})：s \in S\}$是Y的复盖，因此存在最小的$s(i) \in S$使$y \in f(F_{s(i)i})$；记$\min\{s(i)：i=1,2,\cdots\}$为$s(i_0)$，则可断言$y \in V_{s(i_0)i_0+1}$ 事实上，因为$y \in f(F_{s(i_0)i_0})$，而由条件(ii)，有

$$f(F_{si_0+1}) \cap f(F_{s(i_0)i_0}) = \phi, \quad s > s(i_0).$$

又据$s(i_0)$之最小性

$$y \notin f(F_{si_0+1})$$

因此只能有$y \in V_{s(i_0)i_0+1}$。

既然$\mathscr{V}$是$\mathscr{C}$的一个开加细，而$\mathscr{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{V_{si}：i \in S\}$，每个$\{V_{si}：s \in S\}$中的元又是两两不交的。这已经很象是局部有限的了。但事实上两两不交的开集族不一定是局部有限的；须要作如下加工。

对每个$i=1,2,\cdots$，令$V_i = \bigcup_{s \in S} V_{si}$，则$\{f^{-1}(V_i)：i=1,2,\cdots\}$是$X$的一个开复盖，存在局部有限的闭精加细$\{P_i：i=1,2,\cdots\}$。由于$Y$正规，存在开集$W_i \subset Y$使

$$f(P_i) \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i, \quad i=1,2,\cdots.$$

则$\{V_{si} \cap W_i；s \in S\}$便是局部有限的了；且$\{V_{si} \cap W_i；s \in S, i=1,2,\cdots\}$仍是$Y$的一个开复盖。事实上后者是容易验证的。对任一$x \in Y$，如果$x \in V_i$，则由$\{V_{si}：s \in S\}$中的元两两不交，可令$U_x = V_{si_0}(x \in V_{si_0})$，便知$|\{V_{si} \cap W_i：V_{si} \cap U_x \neq \phi\}| = 1$；如果$x \notin V_i$，则可令$U_x = Y / \overline{W}_i$，有$\{V_{si} \cap W_i：V_{si} \cap U_x \neq \phi\}$为空集。因此是局部有限的。 证毕

κ-Lindelöf 空间的任一开复盖有$\leqslant \kappa$的子复盖，κ是$\geqslant \omega$的基数，则称该空间是κ-Lindelöf的

定理11 设$f：X \to Y$是到上的连续闭映射，且对每个$y \in Y$，$f^{-1}(y)$是Lindelöf的，则Y是κ-Lindelöf的充要条件为X是κ-Lindelöf的。

证 先证必要性，设$\mathscr{C}$是X的一个开复盖．与定理10的证明（1）一样，对每个$y\in Y$，选定$\mathscr{C}$的可数子族$\mathscr{C}_y$使$f^{-1}(y)\subset\bigcup\mathscr{C}_y$．令

$$V^y=\{z\in Y: f^{-1}(z)\subset\bigcup\mathscr{C}_y\}$$

$\{V^y: y\in Y\}$是Y的一个开复盖．由于Y是κ-Lindelöf的，故存在子复盖$\{V^y: y\in Y_1\}$，其中$Y_1\subset Y$，$|Y_1|\leqslant\kappa$．于是$\bigcup\{\mathscr{C}_y: y\in Y_1\}$便是$\mathscr{C}$的子复盖，而且因$|\mathscr{C}_y|\leqslant\omega$，$|Y_1|\leqslant\kappa$，故它的基数$\leqslant\kappa\cdot\omega=\kappa$．

再证充分性，设$\mathscr{U}$是Y的一个开复盖，则$\{f^{-1}(u): u\in\mathscr{U}\}$便是$X$的开复盖．因$X$是$\kappa$-Lindelöf的，因此存在基数$\leqslant\kappa$的子复盖$\{f^{-1}(u): u\in\mathscr{U}_1\}$，$\mathscr{U}_1\subset\mathscr{U}$，$|\mathscr{U}_1|\leqslant\kappa$，于是$\mathscr{U}_1$便是$\mathscr{U}$的基数$\leqslant\kappa$的子复盖． 证毕

对于可数次乘积的箱积，可引进一商空间(quotient space)，它可使仿紧性的讨论更为方便，一般说来，一个空间X中定义一等价关系"～"，则等价类所组成的集合赋予如下拓扑便称为原空间之商空间，商空间中之子集u是开集当且仅当$\bigcup u$是原空间中之开集，商映射便是把等价类中的元映射为该等价类的映射．

对$\square_{i<\omega}X_i$中任意两点x,y，如果$\{n<\omega: x(n)\neq y(n)\}$为有限集，则称$x$，$y$等价，记作$x=^*y$．由等价关系"$=^*$"确定的商空间称为$\square_{i<\omega}X_i$的**nabla空间**，记作$\nabla_{i<\omega}X_i$．商映射记作$q$: $\square_{i<\omega}X_i\to\nabla_{i<\omega}X_i$．

引理12 设τ_k: $\square_{i<\omega}X_i\to\square_{i\geqslant k}X_i$由下式确定$\tau_k(\langle x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots\rangle)=\langle x_k,x_{k+1},\cdots\rangle$；即为$\square_{i<\omega}X_i$到$\square_{i\geqslant k}X_i$之投影．如果对每个$k<\omega$，$u^k$是$\square_{i\geqslant k}X_i$中的开集，则$H=\bigcap\{\tau_k^{-1}(u^k): k<\omega\}$是$\square_{i<\omega}X_i$中之开集．

证 容易验证τ_k是连续的，设$p\in H$，存在p的开邻域V^k使$V^k\subset\tau_k^{-1}(u^k)$；不妨设

$$V^k=X_0\times X_1\times\cdots\times X_{k-1}\times V_k^k\times V_{k+1}^k\times\cdots$$

其中每个$V^k_i(i\geqslant k)$是X_i中的开集，令

$$W_n=\bigcap\{V^k_n:k\leqslant n\},\ W=\prod_{n<\omega}W_n.$$

则显然W是$\square_{i<\omega}X_i$中之开集且

$$W=\bigcap\{V^k:k<\omega\};$$

$$p\in W\subset\bigcap\{\tau_k^{-1}(u^k):k<\omega\}=H.$$

故而可知H是$\square_{i<\omega}X_i$中之开集。

引理13 当每个$X_i(i<\omega)$都是紧空间时，投影τ_k：$\square_{i<\omega}X_i\to\square_{i\geqslant k}X_i$为连续的闭映射。

证 连续是显然的。只要证明τ_1是闭映射然后用同样证法可归纳地推得一般结论。设F是$\square_{i<\omega}X_i$中的一个闭集，经证$\tau_1(F)$是$\square_{i\geqslant 1}X_i$中之闭集。再设$x^1(\in\square_{i\geqslant 1}X_i)\notin\tau_1(F)$；$\mathscr{B}(x^1)$记$x^1$的一切箱积开邻域组成之族。如果$x^1$是$\tau_1(F)$之聚点，则对任一$V\in\mathscr{B}(x^1)$，皆有$V\cap\tau_1(F)\neq\phi$。由此可知$\{V\cap\tau_1(F):V\in\mathscr{B}(x^1)\}$具有有限交性质，于是

$$\mathscr{E}=\{\overline{p_0(\tau_1^{-1}(V)\cap F)}:V\in\mathscr{B}(x^1)\}$$

也具有有限交性质，其中p_0是$\square_{i<\omega}X_i$到X_0之投影。由于X_0紧，必存在$x_0\in X_0$使

$$x_0\in\bigcap\mathscr{E};$$

也就是说x_0属于每个$p_0(\tau_1^{-1}(V)\cap F)$之闭包。因此对任一$V\in\mathscr{B}(x^1)$，$x_0$的任一开邻域$u_0$有

$$u_0\cap(p_0(\tau_1^{-1}(V))\cap F)\neq\phi;$$

即存在$y_0\in X_0$，使$y_0\in u_0\cap p_0(\tau^{-1}(V)\cap F)$，也就是说存在$\langle y_1,y_2,\cdots\rangle\in\square_{i\geqslant 1}X_i$使

$$\langle y_0,y_1,y_2,\cdots\rangle\in\tau_1^{-1}(V)\cap F.$$

从而

$$\langle y_0,y_1,\cdots\rangle\in(u_0\times V)\cap F.$$

$u_0\times V$是$\langle x_0,x^1\rangle$的任一箱积开邻域，这就推知$\langle x_0,x^1\rangle$是F之聚点；F闭，故$\langle x_0,x^1\rangle\in F$。但另一方面，由于$x^1\notin\tau_1(F)$，所以

$\langle x_0, x^1\rangle \notin F$。导至矛盾；可见$x^1$不是$\tau_1(F)$之聚点，所以$\tau_1(F)$为闭集。 证毕

定理14 如果每个X_i都是紧空间，则商映射q：$\underset{i<\omega}{\square} X_i \to \underset{i<\omega}{\nabla} X^i$是连续的闭映射。

证 连续性是明显的。设K是$\underset{i<\omega}{\square} X_i$中之闭集。要证明$q(K)$是$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$中之闭集，只要证明$q^{-1}q(K)$是$\underset{i<\omega}{\square} X_i$中之闭集即可。易知

$$q^{-1}q(K)=\bigcup\{\tau_k^{-1}\tau_k(K): k<\omega\}.$$

因为$\underset{i<\omega}{\square} X_i \setminus \bigcup\{\tau_k^{-1}\tau_k(K): k<\omega\}=\bigcap\{\tau_k^{-1}(\underset{i\geqslant k}{\square} X_i \setminus \tau_k(K)): k<\omega\}$，而据引理13，$\tau_k(K)$是$\underset{i\geqslant k}{\square} X_i$中之闭集，因此由$\tau_k$之连续性知每个$\tau_k^{-1}(\underset{i\geqslant k}{\square} X_i \setminus \tau_k(K))$都是开集。再据引理12可知可数个这样的开集之交也是开集；所以$\bigcup\{\tau_k^{-1}\tau_k(K): k<\omega\}$是闭集，也就是$q^{-1}q(K)$是闭集。 证毕

定理15 $\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$是$\omega_1$-开的（如果空间中小于$\lambda$个开集之交仍为开集，则称该空间是$\lambda$-**开**的）

证 设σ_k：$\underset{i\geqslant k}{\square} X_i \to \underset{i<\omega}{\nabla} X_i$是满足$q=\sigma_k\tau_k$的映射。$\sigma_k$是连续且到上的；这是因为$\tau_k$不仅是连续的而且是开映射，事实上$\underset{i<\omega}{\square} X_i$中的每个基开集$\underset{i<\omega}{\Pi} V_i$，$V_i$开于$X_i$，之像$\tau_k(\underset{i<\omega}{\Pi} V_i)=\underset{i\geqslant k}{\Pi} V_i$恰是$\underset{i\geqslant k}{\square} X_i$中之开集；另一方面$\underset{i<\omega}{\square} X_i$中任一开集是基开集之并，可见其像也是开集。这样对$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$中任一开集$u$，$\sigma_k^{-1}(u)=(q\tau_k^{-1})^{-1}(u)=\tau_k q^{-1}(u)$，因而是$\underset{i<\omega}{\square} X_i$中之开集。

设V^k是$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$中的开集，$k<\omega$。往证$\underset{k<\omega}{\bigcap} V^k$也是$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$中的开集。

$$q^{-1}(\bigcap_{k<\omega} V^k)=\bigcap_{k<\omega}\tau_k^{-1}(\sigma_k^{-1}(V^k))$$

据σ_k，τ_k之连续性和引理11可知$q^{-1}(\underset{k<\omega}{\bigcap} V^k)$是$\underset{i<\omega}{\square} X_i$中之开集。据商映射和商拓扑之定义可知$\underset{k<\omega}{\bigcap} V^k$是$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$中之开集。 证毕

定理16 设每个$X_i(i<\omega)$都是紧空间，则下述命题为真。

（1）$\underset{i<\omega}{\square} X_i$仿紧的充要条件为$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$仿紧。

（2）对任一无限基数λ，$\underset{i<\omega}{\square} X_i$是$\lambda$-Lindelöf的充要条件为

$\bigtriangledown_{i<\omega} \tilde{X}_i$是$\lambda$-Lindelöf的。

命题(1)是定理10和定理14的推论；命题(2)是定理11和定理14之推论。

定理17 设λ是一无限基数。如果空间X为λ-Lindelöf和λ-开，则X是仿紧的。

证 首先讨论$\lambda=\omega$的情形。此时空间是Lindelöf 的，由于我们所讨论的空间都是正则（有的作者，如 Engelking，定义 Lindelöf空间就是正则且对每个开复盖有可数子复盖的空间），故对每个$x\in X$，存在开集U_x, V_x使$x\in U_x\subset \overline{U}_x\subset V_x\lhd\mathscr{C}$，$\mathscr{C}$是$X$的一个开复盖。$\{U_x: x\in X\}$也是$X$的一个开复盖，由 Lindelöf性质，存在可数子复盖$\{U_{x_n}: n<\omega\}$，令

$$W_k=V_{x_k}\setminus\bigcup_{n<k}\overline{U}_{x_n},\ k<\omega.$$

则$\{W_k: k<\omega\}$便是$\mathscr{C}$的局部有限的开加细；事实上由于$U_{x_k}\cap W_n=\phi$对一切$n>k$成立，$\{U_{x_n}: n<\omega\}$又是X的复盖，因此$\{W_k: k<\omega\}$是局部有限的。对任一$x\in X$，由于$\{V_{x_k}: k<\omega\}$也是X的复盖，故存在最小的k使$x\in V_{x_k}$则显然$x\in W_k$；可见$\{W_k: k<\omega\}$是X之复盖。至于$\{W_k: k<\omega\}\lhd\mathscr{C}$则是显而易见的了。

现在讨论$\lambda>\omega$之情形，此时X是零维空间；即是存在开闭集为基的空间。事实上对每个开集U和任一$x\in U$，由于X是正则的可以找到可数个开集V_k，$k<\omega$，使

$$x\in\bigcap_{k<\omega}V_k,\ V_{k+1}\subset\overline{V}_{k+1}\subset V_k\subset U,\ k<\omega.$$

又由于X是ω_1-Lindelöf的，因此$\bigcap_{k<\omega}V_k=\bigcap_{k<\omega}\overline{V}_k=W_{x,U}$是一个开闭集，所有$W_{xU}$组成之族显然是$X$的基。设$\mathscr{C}$是$X$的一个开复盖，不妨设$\mathscr{C}$由开闭集组成，由于$\lambda$-Lindelöf性质，存在子复盖$\{V_\alpha: \alpha<\lambda\}$。令

$$W_\alpha=V_\alpha\setminus\bigcup\{V_\beta: \beta<\alpha\}$$

由于X又是λ-开的，所以$\bigcup\{V_\beta: \beta<\alpha\}$是闭集，据此可断定$W_\alpha$

是开闭集．易见$W_\alpha \cap W_\beta = \phi$，$\alpha \neq \beta$，且$\{W_\alpha:\ \alpha < \lambda\}$又是$X$的复盖，所以它是局部有限的。以上说明$X$仿紧．　　证毕

这是一个非常有用的定理，在下节证明某些正面结论时，我们将不至一次地应用它．因为由定理15，$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$是$\omega_1$-开的，因此只要能断定$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$是$\omega_1$-Lindelöf的，便可应用定理17而证明$\underset{i<\omega}{\nabla} X_i$是仿紧，从而由定理10$\underset{i<\omega}{\square} X_i$也是仿紧的了．

§3　集论假设

本节阐明下节中将要用到的一些集论假设．这里当然是指ZFC以外，即Zermelo-Frankel公理体系加选择公理（Choice Axiom）以外的集论假设．凡是要用力迫（forcing）等方法证明该假设与ZFC相容的地方，我们只给出出处而不阐明证明过程．

Martin公理是最常用的集论假设，通常用偏序形式阐述．设$(P,\leqslant)$是一偏序集．$p,q\in P$称为**相容的**（compatible）是指$\exists r\in P(r\leqslant p\wedge r\leqslant q)$；如果$p,q$不相容则记作$p\perp q$．设$A\subset P$，若$A$中任意两元都是不相容的，则称$A$是$P$的**反链**（antichain）．如果$P$中的反链都是可数集，则称$P$**满足**ccc（Countable Chain Condition）．设$D\subset P$，如果$\forall p\in P,\exists q\leqslant p(q\in D)$，则称$D$在$P$中**稠密**（dense）．设$G\subset P$．若$G$满足下述条件，则称$G$是$P$中的**滤子**（filter）：

（a）$\forall p,q\in G,\exists r\in G\ (r\leqslant p\wedge r\leqslant q)$；

（b）$\forall p\in G,\forall q\in P(q\geqslant p\rightarrow q\in G)$．

Martin公理　设$(P,\leqslant)$是非空的满足ccc的偏序集．再设$\mathscr{D}$是P中某些稠密集之族．如果$|\mathscr{D}|<c$，则必存在P中的滤子G使

$$\forall D\in\mathscr{D}(G\cap D\neq\phi).$$

P(c)原则（P(c) principle）　设$\mathscr{A}$是ω中无限集组成的具

有强有限交性质（有限个元的交是无限集）之族．如果$|\mathscr{A}|<c$，则必存在无限集$B\subset\omega$，使$B\subset^* A$对每个$A\in\mathscr{A}$都成立($B\subset^* A$意为$B\setminus A$是有限集)．

Booth定理　Martin公理$\Longrightarrow$P(c)原则．

证　设$\{A_\alpha\subset\omega:\ \alpha<\kappa\}$是满足强有限交性质的族且$\kappa<c$．令

$$P=\{(f,F):\ f\subset\omega,\ F\subset\kappa,\ |f|<\omega,\ |F|<\omega\}$$

再定义$(g,G)\leqslant(f,F)$为

$$f\subset g, F\subset G\text{且}g\setminus f\subset\bigcap_{\alpha\in F}A_\alpha.$$

$(P,\leqslant)$是一偏序集是容易验证的．下面说明$(P,\leqslant)$满足ccc．事实上，如果$\{(k_\alpha,\ K_\alpha):\alpha\in L\}\subset P$是不可数集；即$|L|\geqslant\omega_1$．由于$\omega$中所有有限集组成之族$[\omega]^{<\omega}$只是可数的，故而存在一个有限子集$k$使$k_\alpha=k$对$\alpha\in Q\subset L$成立，而$Q$也是不可数的．这样，如果$\alpha,\beta\in Q$，则

$$(k,\ K_\alpha\cup K_\beta)\leqslant(k_\alpha,\ K_\alpha),$$
$$(k,\ K_\alpha\cup K_\beta)\leqslant(k_\beta,\ K_\beta).$$

即P的每个不可数子集必存在相容元；所以P是满足ccc的．

令$X_\alpha=\{(f,F)\in P:\alpha\in F\}$，这里$\alpha<\kappa$．易见$X_\alpha$稠于$P$；事实上，任取$(k,E)\in P$，则$(k,\ E\cup\{\alpha\})\in X_\alpha$，且$(k,\ E\cup\{\alpha\})\leqslant(k,E)$．显然$|\{X_\alpha:\alpha<\kappa\}|=\kappa<c$．

据Martin公理，存在滤子$G\subset P$，使$G\cap X_\alpha\neq\phi$．取定$(f_\alpha,F_\alpha)\in G\cap X_\alpha$，$\alpha<\kappa$，而令$A=\bigcup_{\alpha<k}f_\alpha$．下面证明$A\subset^* A_\alpha$对一切$\alpha<\kappa$成立．事实上，如果$x\in A\setminus A_\alpha$，$\alpha$为任意取定的$<\kappa$的序数，则可断定$x\in f_\alpha$,从而知$A\setminus A_\alpha\subset f_\alpha$,所以$A\setminus A_\alpha$为有限集．这是因为由$x\in A$，可知存在$\beta<\kappa$，使$x\in A_\beta$；由$x\notin A_\alpha$，可知$x\notin\bigcap_{\gamma\in F_\alpha}A_\gamma$(因为$\alpha\in F_\alpha$)．再因$(f_\alpha,\ F_\alpha)$，$(f_\beta,\ F_\beta)$相容，存在

$$(g,\ W)\in P,\ \text{使}\ (g,\ W)\leqslant(f_\alpha,\ F_\alpha),\ (g,\ W)\leqslant(f_\beta,\ F_\beta).$$

由$(g, W)\leqslant(f_\beta, F_\beta)$和$x\in f_\beta$可知$x\in g$。再由$(g, W)\leqslant(f_\alpha, F_\alpha)$，$x\in g$和$x\notin\bigcap_{r\in F_\alpha}A_r$，便可知$x\in f_\alpha$因为$(g\setminus f_\alpha\subset\bigcap_{r\in F_\alpha}A_r)$。证毕

大家知道，偏序集$(X,\leqslant)$是指满足(i)$x\leqslant y$，$y\leqslant z$则$x\leqslant z$；(ii) $x\leqslant y$，$y\leqslant x$则$x=y$；(iii) 对一切$x\in X$，$x\leqslant x$ 这三个条件的关系。**拟序** (quasi-order) 则是指只满足(i)，(ii) 两条的关系。

在$^\omega\omega$中定义一拟序$\leqslant^*$如下：若$f,g\in{}^\omega\omega$，$\{n<\omega: f(n)>g(n)\}$为有限集，则称$f\leqslant^*g$，或记作$g\geqslant^*f$。$^\omega\omega$中子集A称为**在$^\omega\omega$中无界**即是指它在$(^\omega\omega,\leqslant^*)$中无界；即对任一$g\in{}^\omega\omega$总存在$f\in A$,使$f\nleqslant^*g$。$^\omega\omega$中子集$A$称为在$^\omega\omega$中**全控** (dominating) 是指$A$在$^\omega\omega$中共尾 (cofinal)；即对任一$g\in{}'\omega$ 存在$f\in A$使$g\leqslant^*f$，下列两个著名的基数分别由F. Rothberger与M. Katětov在1939和1960年引入（可见[9]）。

$$\boldsymbol{b}=\min\{|B|: B\text{在}{}^\omega\omega\text{中无界}\}$$

$$\boldsymbol{d}=\min\{|D|: D\text{在}{}^\omega\omega\text{中全控}\}$$

集$A\subset{}^\omega\omega$称为$^\omega\omega$中的**控尺** (scale) 是指它既在$^\omega\omega$中全控又是关于$\leqslant^*$之良序集且$|A|$为正规基数。如果$|A|=\lambda$，且$A=\{f_0\leqslant^*f_1\leqslant^*\cdots\leqslant^*f_\alpha\leqslant^*\cdots;\ \alpha<\lambda\}$，又可称$A$为$\lambda$-**控尺**。

大家知道，一个序数可看作比它小的序数之集，而基数可定义为起始序数，即比它小的序数不能与它一一对应的那种序数。所谓α是正规基数是指α中不存在序型为起始序数β的共尾子集，而$\beta<\alpha$。

定理18 $\omega_1\leqslant\boldsymbol{b}\leqslant\boldsymbol{d}\leqslant c$。

事实上，因$|^\omega\omega|=c$，所以$\boldsymbol{d}\leqslant c$是显然的；$\boldsymbol{b}\leqslant\boldsymbol{d}$由其定义便可知道；$\omega_1\leqslant\boldsymbol{b}$是因为$^\omega\omega$中任何可数子集都不可能在$^\omega\omega$中无界，我们可用熟知的对角线法找到可数子集的上界。

定理19 $\boldsymbol{b}$是正规基数。

证 按$\mathfrak{b}$的定义我们可以找到一个$A\subset{}^{\omega}\omega$，使$A$在${}^{\omega}\omega$中无界，$|A|=\mathfrak{b}$且$A$是关于$\leqslant^*$的良序集．事实上，$A$可归纳地作成，据$\mathfrak{b}$的定义知存在$B\subset{}^{\omega}\omega$在${}^{\omega}\omega$中无界，$|B|=\mathfrak{b}$．将$B$良序化；$B=\{f_\alpha:\alpha<\mathfrak{b}\}$，则对每个$\beta<\mathfrak{b}$,可以确定一个$g_\beta\in{}^{\omega}\omega$，使$g_\beta$是$G_\beta=\{f_\alpha,\ g_\alpha:\alpha<\beta\}$之上界；这是能够做到的，因为$|G_\beta|<\mathfrak{b}$，$G_\beta$在${}^{\omega}\omega$中有上界．这样，令$A=\{g_\beta:\beta<\mathfrak{b}\}$便是符合前述要求的无界集了．

有了上述集A，定理的结论便是显然的了． 证毕

定理20 $\mathfrak{b}=\mathfrak{d}$当且仅当在${}^{\omega}\omega$中存在$\mathfrak{b}$-控尺．

这个定理是$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{d}$定义的直接推论。

读者还不难看到CH$\Longrightarrow$在${}^{\omega}\omega$中存在ω_1-控尺．进而言之，还可推知下述结论．

定理21 P(c)原则$\Longrightarrow$在${}^{\omega}\omega$中存在c-控尺．

证 存在c-控尺相当于说$\mathfrak{b}=c$,也就是说对任意的$\mathscr{D}\subset{}^{\omega}\omega$，如果$|\mathscr{D}|<c$，则$\mathscr{D}$有界．

记$\mathscr{D}=\{f_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$\kappa$是小于$c$的基数；还不妨设每个$f_\alpha\in{}^{\omega}\omega$都是递增函数；如果不是,我们可用一个递增的$g_\alpha(g_\alpha\geqslant^* f_\alpha)$代替$f_\alpha$，所得$\widetilde{\mathscr{D}}=\{g_\alpha:\alpha<\kappa\}$之上界仍为$\mathscr{D}$之上界．定义$\tau$：${}^{\omega}\omega\to\omega\times\omega$如下：

$$\tau(f)=\{(n,m):n<\omega,\ f(n)\geqslant m\},\ f\in{}^{\omega}\omega$$

再令

$$B_k^f=\{(n,m):n\geqslant k,\ (n,m)\in\tau(f)\},\ k<\omega;$$

显然$B_0^f=\tau(f)$。令

$$\mathscr{E}=\{B_k^f:f\in\mathscr{D},\ k<\omega\}$$

则$\mathscr{E}\subset[\omega\times\omega]^\omega$，即$\mathscr{E}$为$\omega\times\omega$中无限集之族，且$|\mathscr{E}|<c$．把$\omega\times\omega$看作$\omega$而应用P($c$)原则，可知存在无限集$A\subset\omega\times\omega$，使

$$A\subset^* E,\ E\in\mathscr{E}.$$

令$H=\{n<\omega:\ A\cap(\{n\}\times\omega)\neq\phi\}$；因$\mathscr{E}$中包含$B_k^f$而$k$是$\omega$中任一

元，所以H必为无限集。定义$g\in {}^{H}\omega$如下

$$g(n)=\min(A\cap(\{n\}\times\omega)),\quad n\in H.$$

由于$A\subset^{*}\tau(f)$，所以在H中至多除去有限个n外都有$f(n)\leqslant g(n)$，再定义$h\in {}^{\omega}\omega$如下：

$$h(n)=g(\min\{k\in H:\ k\geqslant n\}),\quad n<\omega.$$

由于每个$f\in\mathscr{D}$是递增函数，所以对每个$f\in\mathscr{D}$，有

$$f\leqslant^{*}h$$

这说明$\mathscr{D}$有界。 证毕

推论22 $MA\Longrightarrow$在${}^{\omega}\omega$中存在c-控尺。

总所周知$CH\Longrightarrow MA$，而且$MA+\neg CH$也是相容的。由推论22，我们又知道了在${}^{\omega}\omega$中存在c-控尺也是与ZFC相容的。不仅如此，S. H. Hechler还在〔10〕中证明了下述结果。

定理23 （1）设λ是满足$\omega_1\leqslant\lambda\leqslant c$的任一正规基数，则在${}^{\omega}\omega$中存在$\lambda$-控尺是与ZFC相容的。

（2）不论λ是什么基数，在${}^{\omega}\omega$中不存在λ-控尺也是与ZFC相容的。

（3）$d=c$与不存在c-控尺在ZFC中是相容的。

从以上所述的定理，我们知道了下述蕴涵式：

$$CH\Longrightarrow MA\begin{array}{l}\Longrightarrow \text{在}\,{}^{\omega}\omega\,\text{中存在控尺},\\ \Longrightarrow d=c,\end{array}$$

但是每个蕴涵符号反过来都是不对的。也就是说所示每个集论假设都与ZFC相容，而且是逐个减弱的。

§4 可数个紧空间箱积仿紧性的相容性结果

本章一开始就提到M. E. Rudin首先证明了在CH下可数个紧度量空间的箱积是仿紧的，其后K. Kunen，E. van Douwen等人

又给出了一系列更一般的结果和更简洁的证明. 最近L. Lawrance又证明了有理数空间的可数次箱积的仿紧性也是与ZFC相容的，但是至今人们还不能回答这些结果是否是绝对的成立抑或是独立地成立；即便是对最简单的这类箱积空间如$\square^{\omega}(\omega+1)$，人们也不能作出回答.

空间X的重度(weight)$W(X)$：X的拓扑基的基数中之最小者.

定理24(CH)　若每个$X_i(i<\omega)$紧且$W(X_i)\leqslant\omega_1$，则$\square_{i<\omega}Xi$仿紧.

证　由于$W(X_i)\leqslant\omega_1$，可以推知$W(\square_{i<\omega}X_i)\leqslant\omega_1$；事实上，如果用$\mathscr{B}_i$记$X_i$中基数$\leqslant\omega_1$的拓扑基，则$\mathscr{B}=\{\prod_{i<\omega}u_i:u_i\in\mathscr{B}_i\}$是$\square_{i<\omega}X_i$的一个拓扑基. 显然$|\mathscr{B}|\leqslant\omega_1^{\omega}$；在CH下，$\omega_1=2^{\omega}$，因此$|\mathscr{B}|\leqslant(2^{\omega})^{\omega}=2^{\omega}=\omega_1$，由此可断定$W(\square_{i<\omega}X_i)\leqslant\omega_1$，既然$\square_{i<\omega}X_i$之重度$\leqslant\omega_1$，那么任一开复盖必可找出$\leqslant\omega_1$的子复盖，从而知$\square_{i<\omega}X_i$是$\omega_1$-Lindelöf的，据定理11和引理13可断定$\nabla_{i<\omega}X_i$是$\omega_1$-Lindelöf的，再据定理15与定理17得$\nabla_{i<\omega}X_i$仿紧. 最后应用定理16知$\square_{i<\omega}X_i$仿紧.

证毕

设$x\in X$，基数$\min\{|\mathscr{B}(x)|:\mathscr{B}(x)$是$x$点的邻域基$\}$称为点$x$**的特征**(character)记作$\chi(x,X)$. 对所有点$x$，$\chi(x,X)$之上确界称为空间$X$**之特征**，记作$\chi(X)$.

如果$\chi(X)\leqslant\omega$，则称空间是**第一可数的**.

满足下述条件的基数α中最小的一个称为空间X的Lindelöf数，记作$L(X)$：X的任一开复盖存在基数$\leqslant\alpha$的子复盖，当$L(X)=\omega$时，X即为Lindelöf空间.

定理25(Arhangel'skii定理)　$|X|\leqslant2^{\chi(X)\cdot L(X)}$.

这是一个极为重要的定理，它回答了Alexandroff提出了50年之久的著名问题：是否每个第一可数的紧空间的基数都$\leqslant2^{\omega}$？事实上对于第一可数的紧空间$\chi(X)=\omega$，$L(X)\leqslant\omega$，因此$|X|\leqslant2^{\omega}$.

这个定理的证明可见〔4〕。

定理26(CH) 如果每个 X_i 紧，只是第一可数的，则 $\square_{i<\omega} X_i$ 是仿紧的。

这个定理较一开始提到的Rudin给出的结果更一般。

证 由于 $\chi(X_i)\leqslant\omega$ 且 $L(X_i)\leqslant\omega$，因此据定理25知 $|X_i|\leqslant 2^\omega$。在CH下，即有 $|X_i|\leqslant\omega_1$，$i<\omega$。再应用条件 $\chi(X_i)\leqslant\omega$，$i<\omega$，可知 $W(X_i)\leqslant\omega_1$，$i<\omega$，最后应用定理24可断定 $\square_{i<\omega} X_i$ 仿紧。 证毕

事实上，上述结果在MA下也是成立的。

定理27（在 ${}^\omega\omega$ 中存在 c-控尺） 如果每个 X_i 紧且第一可数，则 $\square_{i<\omega} X_i$ 是仿紧的。

证 首先证明 $\nabla_{i<\omega} X_i$ 是 c-开的。取定 $q(x)\in\nabla_{i<\omega} X_i$，$x\in\square_{i<\omega} X_i$。设 $u^\alpha(\alpha<k)$ 是 $q(x)$ 的开邻域，这里 k 是一小于 c 的基数。对每个 $x_n\in X_n$，设 $\{V_n^k: k<\omega\}$ 是 x_n 的邻域基。再设对每个 $\alpha<k$，

$$q(\square_{n<\omega} V_n^{f_\alpha(n)})\subset u^\alpha$$

其中 $f_\alpha\in{}^\omega\omega$。因在 ${}^\omega\omega$ 中存在 c-控尺，而 $|\{f_\alpha:\alpha<k\}|<c$，所以存在 $g\in{}^\omega\omega$，使

$$f_\alpha\leqslant^* g,\ \alpha<k.$$

则 $q(\square_{n<\omega} V_n^{g(n)})$ 便是 $q(x)$ 之开邻域且

$$q(\square_{n<\omega} V_n^{g(n)})\subset\bigcap_{\alpha<k} u^\alpha$$

这说明 $\bigcap_{\alpha<k} u^\alpha$ 为开集；由此可知 $\nabla_{i<\omega} X_n$ 是 c-开的。

其次，据Arhangel'skii定理，而 X_n 紧且第一可数，所以 $|X_n|\leqslant c$，$n<\omega$。于是 $W(X_n)\leqslant c$。应用与定理24中同样的证法可知 $W(\square_{i<\omega} X_i)\leqslant c$。由此可判定 $W(\nabla_{i<\omega} X_i)\leqslant c$；事实上，如果用 $\mathscr{B}_i$ 记 X_i 中基数 $\leqslant c$ 的基，则 $\mathscr{B}=\{\Pi_{i<\omega} u_i: u_i\in\mathscr{B}_i\}$ 是 $\square_{i<\omega} X_i$ 之基且 $|\mathscr{B}|\leqslant c$，而 $q(\mathscr{B})=\{q(B):B\in\mathscr{B}\}$ 一定是 $\nabla_{i>\omega} X_i$ 之拓扑基，故而 $W(\nabla_{i<\omega} X_i)\leqslant c$，而从 $W(\triangle_{i<\omega} X_i)\leqslant c$，可断定 $\nabla_{i<\omega} X_i$ 是 c-Lindelöf的。

既然 $\nabla_{i<\omega} X_i$ 是 c-Lindelöf和 c-开的，据定理17，它是仿紧的。

从而$\square_{i<\omega} X_i$仿紧.

为什么$q(\mathscr{B})$一定是$\nabla_{i<\omega} X_i$的拓扑基呢？首先$q^{-1}q(\Pi_{i<\omega} u_i)=\bigcup_{k<\omega}(X_0\times X_1\times\cdots\times X_k\times\Pi_{i>k} u_i)$是$\square_{i<\omega} X_i$中之开集，因而据商拓扑之定义$q(\Pi u_i)$是$\nabla_{i<\omega} X_i$中的开集．其次若$W$是$\nabla_{i<\omega} X_i$中之开集，$x\in W$，则$q^{-1}(W)$是$\square_{i<\omega} X_i$中之开集；取定$y\in q^{-1}(x)$，$y\in q^{-1}(W)$为$q^{-1}(W)$之内点，故存在开邻域$B\in\mathscr{B}$使$y\in B\subset q^{-1}(\omega)$．于是

$$x=q(y)\in q(B)\subset W.$$

由此可见$q(\mathscr{B})$是$\nabla_{i<\omega} X_i$之拓扑基．　　证毕

有趣的是我们还可以把此命题成立的集论假设减弱为$\mathbf{d}=c$．为此先证明下述引理．

引理28　$\mathbf{d}=c\Rightarrow$对一切$F\subset{}^{\omega}\omega$和一切$I\subset[\omega]^{\omega}$（$[\omega]^{\omega}$表示$\omega$中所有无限集组成之族），只要$|F|+|I|<c$，必存在$g\in{}^{\omega}\omega$使$\{n\in P:f(n)<g(n)\}$对一切$f\in F$，$P\in I$都是无限集．

证　对每个$f\in F$，$P\in I$，定义$h_{fP}\in{}^{\omega}\omega$如下

$$h_{fP}(n)=f[\min(P\cap\{k:k\geqslant n\})].$$

由于$|F|+|I|<c$，故而$|\{h_{fP}:f\in F,\ P\in I\}|<c$．据$\mathbf{d}=c$，$\{h_{fP}:f\in F,\ P\in I\}$不能在${}^{\omega}\omega$中全控，故存在$g\in{}^{\omega}\omega$使

$$|\{n<\omega:h_{fP}(n)<g(n)\}|=\omega$$

对一切$f\in F$，$P\in I$成立．由此可推知

$$|\{n<P:f(n)<g(n)|=\omega,$$

对一切$f\in F$，$P\in I$成立．事实上不妨假定g是递增函数，这样对每个使$h_{fP}(n)<g(n)$成立的n，存在$m=\min(P\cap\{k:k\geqslant n\})$，使

$$g(m)\geqslant g(n)>h_{fP}(n)=f(m),$$

因而可断定$|\{n<P:f(n)<g(n)\}|=\omega$.

定理29（$\mathbf{d}=c$）　如果每个X_i紧且第一可数，则$\square_{i<\omega} X_i$仿紧．

证　首先证明在∇X_i中存在拓扑基$\mathscr{B}$满足c-闭条件：若$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$且$|\mathscr{A}|<c$，则$\bigcup\mathscr{A}$是闭集．

令

$$\mathscr{B}=\{\bigcap_{k<\omega}(\mathop{\nabla}_{i<\omega}B_{ik}):B_{ik}\text{在}X_i\text{中开，且}\bar{B}_{ik+1}\subset B_{ik}\}$$

可以证明此族即为所求。事实上，设 $\lambda<c$，对每个$\alpha<\lambda$，$B_\alpha=\bigcap_{k<\omega}\mathop{\nabla}_i B_{ik\alpha}\in\mathscr{B}$。下面证明$K=\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha$是$\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i$中之闭集。任取$y\in\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i\setminus K$，设$\{u_{ik}:k<w\}$是$y_i\in X_i$之邻域基；它满足$u_{ik+1}\subset u_{ik}$，$k<\omega$。

对每个$\alpha<\lambda$，因$y\notin K$故$y\notin B_\alpha=\bigcap_{k<\omega}\mathop{\nabla}_i B_{ik\alpha}$因此存在$f_\alpha\in{}^\omega\omega$，无限集$P_\alpha\subset\omega$，使

$$u_{if_\alpha(i)}\bigcap B_{ik_\alpha\alpha}=\phi,\ i\in P_\alpha.$$

由于$\lambda<c$，所以$|\{f_\alpha:\alpha<\lambda\}|+|\{p_\alpha:\alpha<\lambda\}|<c$，据引理28可知存在$g\in{}^\omega\omega$使$\{i\in p_\alpha:f_\alpha(i)<g(i)\}=I_\alpha$为无限集，因此

$$u_{ig(i)}\bigcap B_{ik_\alpha\alpha}=\phi,\ i\in I_\alpha,$$

这是因为$g(i)>f_\alpha(i)(i\in I_\alpha)$，从而$u_{ig(i)}\subset u_{if_\alpha(i)}$。这样，对任意的$\alpha<\lambda$，有

$$\mathop{\nabla}_{i<\omega}u_{ig(i)}\bigcap\mathop{\nabla}_{i<\omega}B_{ik_\alpha\alpha}=\phi$$

从而
$$\mathop{\nabla}_{i<\omega}u_{ig(i)}\bigcap(\bigcap_{k<\omega}\mathop{\nabla}_i B_{ik\alpha})=\phi,\alpha<\lambda$$

由于$\mathop{\nabla}_{i<\omega}u_{ig(i)}$是$y$之邻域，故可断定$y\notin\bar{K}$；即$K$为闭集。

有了具有上述c-闭性质的拓扑基$\mathscr{B}$，$\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i$之仿紧性就容易证明了。设$\mathscr{C}$是$\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i$之任一开复盖。据Arhangel'skii定理，$|X_i|\leqslant c$，$i<\omega$，从而知$|\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i|\leqslant c$。不妨设$|\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i|=c$，将$\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i$良序化；$\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i=\{f_\alpha:\alpha<c\}$。我们可对每个$\beta<c$，归纳地确定$B_\beta\in\mathscr{B}$，使$\{B_\beta:\beta<c\}$是$\mathscr{C}$的加细且两两不交，从而断定$\mathop{\nabla}_{i<\omega}X_i$仿紧。事实上，设$\gamma<c$，再归纳地假设对每个$\beta<\gamma$，$\mathscr{B}_\beta=\{B_\alpha\in\mathscr{B}:\alpha<\beta\}$已经确定且满足：（1）$\{f_\alpha:\alpha<\beta\}\subset\bigcup\mathscr{B}_\beta$；（2）$\mathscr{B}_\beta\lhd\mathscr{C}$；（3）$B_\alpha$，$\alpha<\beta$，间两两不交。如果$\gamma$是极限序数则令$\mathscr{B}_\gamma=\bigcup_{\beta<\gamma}\mathscr{B}_\beta$即可。如果$\gamma$是后继序数，记$\gamma=\lambda+1$。因$|\mathscr{B}_\gamma|<c$，由$c$-闭性质，可知$\bigcup\mathscr{B}_\lambda$是闭集。设$\alpha_\lambda=\min(\{f_\alpha:\alpha<c\}\setminus\bigcup\mathscr{B}_\lambda)$，显然$\alpha_\lambda\geqslant\lambda$；又因$\mathscr{B}_\lambda$满足（1），所以$\{f_\alpha:\alpha<\alpha_\lambda\}\subset\bigcup\mathscr{B}_\lambda$。由于$\bigcup\mathscr{B}_\lambda$是闭集，可以找到$B_\lambda\in\mathscr{B}$使$f_{\alpha_\lambda}\in B_\lambda$，$B_\lambda\bigcap(\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha)=$

ϕ，且$B_\lambda \lhd \mathscr{C}$。这样令$\mathscr{B}_\gamma = \mathscr{B}_\lambda \cup \{B_\lambda\}$便能满足（1），(2)，（3）。

最后应用定理16，可知$\square_{i<\omega} X_i$是仿紧的。　　　　证毕

以上证明首先是由J.Roitman给出的。自然会问，如果把集论假设改成在${}^\omega\omega$中存在控尺（不一定是c-控尺），这一命题是否仍然成立呢？遗憾的是还没有找到这个证明，但是van Douwen给出了下述定理([6])。

定理30（在${}^\omega\omega$中存在λ-控尺）　若每个X_i紧且可度量，则$\square X_i$是仿紧的。

证　设κ为一基数。一空间X称为κ-可度量的是指存在一函数

$$\sigma: X \times \kappa \to \mathscr{C}(X),$$

其中$\mathscr{C}(X)$表示X中所有开集组成之族，使：（i）$\{\sigma(x, \alpha): \alpha < \kappa\}$是点$x$的邻域基；（$ii$）对任意的$x$，$y \in X$，$\alpha$，$\beta < \kappa$，如果$\alpha \leqslant \beta$则〈$a$〉$y \in \sigma(x, \alpha) \Rightarrow \sigma(y, \beta) \subset \sigma(x, \alpha)$；〈$b$〉$y \notin \sigma(x, \alpha) \Rightarrow \sigma(y, \beta) \cap \sigma(x, \alpha) = \phi$。

当$cf(\kappa) > \omega$($cf(\kappa) = \min\{\gamma: \gamma$为与$\kappa$共尾的序数$\}$)时，这一定义和普通的$\kappa$-可度量定义相同。

（1）$\nabla_{i<\omega} X_i$是λ-可度量的。

设i，$k < \omega$，$x \in X_i$，$B_i(x, k)$表示X_i的某个度量下的2^{-k}-开球（中心为x，半径为2^{-k}），它们满足下述条件

(1.1) $\{B_i(x, k): k < \omega\}$是$x$的邻域基；

(1.2) 对一切x，$y \in X$和k，$l < \omega$，如果$k \leqslant l$，则〈a〉$y \in B_i(x, k+1) \Rightarrow B_i(y, l+1) \subset B_i(x, k)$；〈$b$〉$y \notin B_i(x, k) \Rightarrow B_i(y, l+1) \cap B_i(x, k+1) = \phi$。

读者不难验证对度量空间X_i，上述的$B_i(x, k)$，$i < \omega$，$k < \omega$，是可以作出的。

对$x \in \nabla_{i<\omega} X_i$和$f \in {}^\omega\omega$定义

$$V(x,\ f)=\bigcap_{k<\omega}\mathop{\nabla}_{i}B_i(x_i,\ f(i)+k).$$

因为存在λ-控尺，不难知道$\mathop{\nabla}\limits_{i<\omega}X_i$是$P$-空间（可数个邻域之交仍为邻域）．因此当$A=\{f_0\leqslant^* f_1\leqslant^*\cdots\leqslant^* f_\alpha\leqslant^*\cdots:\alpha<\lambda\}$是$^\omega\omega$的$\lambda$-控尺时，

(2.1) $\{V(x,\ f_\alpha\}:\alpha<\lambda\}$是$x$的开邻域基；

(2.2) 对一切$x,\ y\in\mathop{\nabla}\limits_{i<\omega}X_i,\ f_\alpha,\ f_\beta\in A$，当$\alpha\leqslant\beta$时，⟨a⟩$y\in V(x,\ f_\alpha)\Rightarrow V(y,f_\beta)\subset V(x,\ f_\alpha)$；⟨b⟩$y\notin V(x,f_\alpha)\Rightarrow V(y,\ f_\beta)\cap V(x,\ f_\alpha)=\phi$.

以上说明$\mathop{\nabla}\limits_{i<\omega}X_i$是$\lambda$-可度量的.

(2) 每个κ-可度量空间是仿紧的.

设$\sigma: X\times\kappa\to\mathscr{C}(X)$是满足$(i)$，$(ii)$的函数．首先，可以断定对一切$x,\ y\in X,\ \alpha<\kappa$，如果$y\in\sigma(x,\ \alpha)$，则

$$\sigma(y,\ \alpha)=\sigma(x,\ \alpha)\qquad (1)$$

事实上，据(ii)，当$y\in\sigma(x,\alpha)$时，必有$\sigma(y,\ \alpha)\subset\sigma(x,\ \alpha)$；而另一方面，$x\in\sigma(y,\ x)$（否则，据$(ii)$⟨b⟩，$\sigma(y,\ \alpha)\cap\sigma(x,\ \alpha)=\phi$），从而知$\sigma(x,\ \alpha)\subset\sigma(y,\ \alpha)$.

现设$\mathscr{U}$是X的一个开复盖，定义$\mu: X\to\kappa$如下：

$$\mu(x)=\min\{\alpha<\kappa:\exists\,\mathscr{U}\in u(\sigma(x,\ \alpha)\subset u)\}.$$

于是

$$\mathscr{A}=\{\sigma(x,\ \mu(x)):x\in X\}$$

便是$\mathscr{U}$的一个加细，而且它的元素是两两不交的，从而说明X是仿紧的．下面证明$\mathscr{A}$中元素两两不交．设$x,\ y\in X,\ \mu(x)\leqslant\mu(y)$．如果$y\notin\sigma(x,\ \mu(x))$，据$(ii)$⟨b⟩有

$$\sigma(y,\ \mu(y))\cap\sigma(x,\ \mu(x))=\phi.$$

如果$y\in\sigma(x,\ \mu(x))$，据（1）式知

$$\sigma(y,\ \mu(x))=\sigma(x,\ \mu(x))$$

由$\mu(y)$之最小性，知$\mu(y)\leqslant\mu(x)$，从而$\mu(y)=\mu(x)$．因此$\sigma(y,\ \mu(y))=\sigma(x,\ \mu(x))$.

证毕

K.Kunen还证明了下述定理．该定理中把前述命题中的第一可数条件代之以散空间；一空间称为散空间（scattered space）是指任一子集中总含有该子集的一个孤立点（isolated point）．

定理31（CH）　如果每个X_i紧且散，则$\square_{i<\omega} X_i$是仿紧空间．

证　对任一空间X，可按下述方式定义一个集列称为X的Cator-Bendixon序列：$X^{(0)}=X$，$X^{(\alpha+1)}=\{x\in X^{(\alpha)}: x$不是$X^{(\alpha)}$之孤立点$\}$；当$\gamma$为极限序数时，$X^{(\gamma)}=\bigcap\{X^{(\alpha)}:\alpha<\gamma\}$．读者不难验证：$X$是散空间之充要条件是存在$\alpha$使$X^{(\alpha)}=\phi$；每个$X^{(\alpha)}$都是$X$中之闭集，且$X^{(0)}\supset X^{(1)}\supset\cdots\supset X^{(\alpha)}\supset\cdots$；如果$X$是紧空间，则使$X^{(\alpha)}=\phi$成立的第一个序数$\alpha$必是后继序数$\beta+1$，且$X^{(\beta)}$必为有限集，这个$\beta$就称为$X$的级(rank)，记作$\beta=\mathrm{rank}(X)$．

设$\mathscr{C}$是$\square_{i<\omega} X_i$的一个开复盖，我们将找到$\mathscr{C}$的一个基数$\leqslant c$的闭加细$\mathscr{F}$．对每个$F\in\mathscr{F}$择定$C_F\in\mathscr{C}$它满足$F\subset C_F$．显然$\mathscr{G}=\{C_F: F\in\mathscr{F}\}\subset\mathscr{C}$，它仍为$\square_{i<\omega} X_i$之复盖且$|\mathscr{G}|\leqslant c$．这说明$\square_{i<\omega} X_i$是$c$-Lindelöf的．据定理16，$\nabla_{i<\omega} X_i$也是$c$-Lindelöf的，在CH下，$\nabla_{i<\omega} X_i$是$\omega_1$-Lindelöf的．于是据定理15，定理17和定理16（1）可知$\square_{i<\omega} X_i$仿紧．

下面证明对任意的开复盖$\mathscr{C}$存在基数$\leqslant c$的闭加细．

首先，令$T=c^{<\omega_1}=\bigcup\{{}^{\xi}c:\xi<\omega_1\}$，其中${}^{\xi}c$表示长度为$\xi$而取值于$c$的序列．这样，每个$s\in T$都是一个序列，其长度$l(s)$为可数序数，如果$\eta<l(s)$，则$s\restriction\eta$表示$s$的前段子序列，其长度为$\eta$．设$s\in T$，$\mu\in c$，用$s\mu$表示这样一个序列：它是在序列$s$之后接上元$\mu$而成的新序列；显然$s\mu$的长度为$l(s)+1$．

下面用递归方法对每个$s\in T$定义一闭集之积$K(s)=\prod_{i<\omega} K_i(s)$，满足下述条件：

（1）$K(\phi)=\square_{i<\omega} X_i$，$\phi$表示空列；

（2）$K(s)=\bigcup\{K(s\mu):\mu<c\}$；

（3）若$l(s)$为极限序数，则$K(s)=\bigcap\{K(s\restriction\xi):\xi<l(s)\}$；

（4）对每个$\mu<c$，或有$K(s\mu)\lhd\mathscr{C}$或有

$$\exists i[\mathrm{rank}(K_i(s\mu))<\mathrm{rank}(K_i(s))]。$$

根据（2），（3）两条，可知对每个$p\in\square_{i<\omega}X_i$，必存在$f\in{}^{\omega_1}c$使$p\in K(f\restriction\xi)$对一切$\xi<\omega_1$成立。如果$K(f\restriction\xi)$不满足$K(f\restriction\xi)\lhd\mathscr{C}$，据（4）必存在$i<\omega$使$\mathrm{rank}(K_i(f\restriction\xi+1)<\mathrm{rank}(K_i(f\restriction\xi))$.因为序数只能下降有限次，如果对每个$\xi<\omega_1$总不能有$K(f\restriction\xi)\lhd\mathscr{C}$，那么对每个$i<\omega$，$\mathrm{rank}(K_i(f\restriction\xi))$只能随$\xi$之增大而下降有限次而固定不变；即有$\xi_i<\omega_1$当$\xi\geqslant\xi_i$时$\mathrm{rank}(K_i(f\restriction\xi))$固定不变。令$\eta=\sup\{\xi_i:i<\omega\}$，则当$\xi\geqslant\eta$时，每个$i$对应的$\mathrm{rank}(K_i(f\restriction\xi))$将固定不变；据（4）便知$K(f\restriction\eta)\lhd\mathscr{C}$而得到矛盾。以上说明对每个$p\in\square_{i<\omega}X_i$总存在$s\in T$使$p\in K(s)\lhd\mathscr{C}$；即$\{K(s):s\in T\}$是$\mathscr{C}$的一个闭加细。由于$|T|\leqslant c$，故可断言$\mathscr{C}$有基数$\leqslant c$的闭加细。因此，只要能对每个$s\in T$，确定$K(s)$使(1)-(4)得以满足，证明就完成了。

对于极限步骤，只要取交而使（3）成立即可。现在讨论后继步骤。设$K(s)$已经确定，$\beta_i=\mathrm{rank}(K_i(s))$。则$Y_i=(K_i(s))^{(\beta_i)}$为有限集。$|\square_{i<\omega}Y_i|=c$。故可找到开箱积$\square_{i<\omega}V_i$组成之族$\mathscr{V}$，$|\mathscr{V}|=c$，使$\mathscr{V}$复盖$\square_{i<\omega}Y_i$且$\mathscr{V}\lhd\mathscr{C}$。这样我们可以定义$c$个闭集，每个闭集$K$形如$\prod_{i<\omega}K_i$，$K_i$在$X_i$中闭，使满足下面两个条件之一，再把这$c$个闭集编号为$\{K(s\mu):\mu<c\}$。

（a）$K=\overline{V}\cap K(s)$，其中V是$\mathscr{V}$中的元。

（b）存在$i<\omega$，使：

（i）$K_i=K_i(s)\setminus(V_i^1\cup\cdots\cup V_i^t)$，$V^1,V^2,\cdots,V^t\in\mathscr{V}$且$Y_i\subset V_i^1\cup\cdots\cup V_i^t$；

（ii）$K_j=K_j(s)$，$j\neq i$。

如此确定的$K(s\mu)$必满足(1)-(4)中相应的要求。实际上只要验证（2），（4）两条。首先，每个$K(s\mu)$必满足（a），（b）两条之一，因为我们就按这两个要求来确定$K(s\mu)$的；（a），（b）又

是互相排斥的；如果$K(s\mu)$满足（a）则必不满足（b），反之也对。$K(s\mu)$满足（a），则$K(s\mu)\lhd\mathscr{C}$；满足（b），则因$Y_i\subset\bigcup_{k=1}^{j}V_i^k$，可知$\mathrm{rank}(K_i(s\mu))<\mathrm{rank}(K_i(s))$。这说明（4）被满足。现设$p\in K(s)$.如果$p$不含在满足（$b$）的那些$K(s\mu)$中，那么由于$Y_i$是有限集，因此对每个$i<\omega$，必存在$g_i\in Y_i$使$\forall V\in\mathscr{V}(g_i\in V_i\rightarrow p_i\in V_i)$。令$g=\langle g_0, g_1, \cdots\rangle$，则$g$、$p$同属某个$\bar{V}\cap K(s)$；即$p$属某个满足（$a$）的$K(s\mu)$中；可见$K(s)=\bigcup_{\mu<\omega}K(s\mu)$，即（2）被满足。这一证明由Kunen给出（[11]） 证毕

序数空间是散空间；当序数可数时，它又是第一可数的和可度量的。因此据以上讨论，可得到下述推论。

推论32(CH) 对任一个序数λ，箱积$\square^{\omega}(\lambda+1)$是仿紧的。

推论33（存在λ-控尺或$\boldsymbol{d}=c$） 对任一可数序数，$\square^{\omega}(\xi+1)$是仿紧的。

87年，杨和Williams证明了在存在λ-控尺的假设下，对任一序数λ，$\square^{\omega}(\lambda+1)$仿紧(见[12]或[13])。事实上，我们在[14]证明了定理34。

我们称一空间为**特殊仿紧**的（special paracompact），如果该空间存在一个基，使空间的每一开复盖有一个两两不交的，由基中的元组成的开加细。称一空间是**超仿紧**的(ultraparacompact)，如果该空间的每一开复盖有一个两两不交的开加细。显然，

特殊紧仿⇒超仿紧⇒仿紧。

定理34 如果$\nabla^{\omega}(\alpha+1)$是特殊仿紧的，其中$\alpha$是任一可数序数，则对任一序数$\lambda$，$\nabla^{\omega}(\lambda+1)$也是特殊仿紧的。

这一定理的证明由于占用篇幅太多，不在这里阐述了。读者不难发现，在定理29和定理30的证明中都是证明了$\nabla_{i<\omega}X_i$是超仿紧的。如果再进一步考察，还可发现这两个定理的证明实际上也相当于证明了$\nabla_{i<\omega}X_i$是特殊仿紧的。拿定理30来说，证明中所得到的两两不交开加细是形如$V(x, f)=\bigcap_{k<\omega}\nabla_i B_i(x_i, f(i)+k)$的集

组成之族。对可数序数α作成的箱积$\nabla^{\omega}(\alpha+1)$来说，$B_i(x_i, f(i)+k)$可以是$\alpha+1$中之基集，因而$\mathop{\nabla}\limits_{i<\omega} B_i(x_i, f(i)+k)$便是$\nabla^{\omega}(\alpha+1)$中之基集。进一步我们可以证明对空间$\nabla^{\omega}(\alpha+1)$来说，可数个基集之交是两两不交的基集之并，因此所得的开加细可以改造成基开集组成之加细，由此看来应用定理29和定理30之证明方法，可以断定对可数序数α，$\nabla^{\omega}(\alpha+1)$是特殊仿紧的；于是由定理34，可得：

定理35（存在λ-控尺或$\boldsymbol{d}=c$）　对任一序数ξ，$\square^{\omega}(\xi+1)$是仿紧的。

人们自然会问，对于第一可数或可度量的紧空间之ω次箱积，至少是$\square^{\omega}(\omega+1)$，是否在ZFC中绝对地仿紧呢？或者能否找到非绝对仿紧的反例呢？Rudin在70年代初就猜想$\nabla^{\omega}(\omega+1)$是绝对地仿紧的；但直到现在还没有找到这个证明。

还值得一提的结果是L.Lawrence关于有理数ω次箱积仿紧性的定理（见〔15〕）。他提出了被称为**序假设**(order hypothesis)的集论假设，并证明了下述定理。

序假设：设Q为有理数集。$\nabla^{\omega}Q$中存在偏序$\leqslant$使$(\nabla^{\omega}Q, \leqslant)$是一树（tree）且满足：（1）树高$\leqslant \boldsymbol{d}$；（2）对任一$t\in\nabla^{\omega}Q$，$\{s\in\nabla^{\omega}Q: t\leqslant s\}$是$\nabla^{\omega}Q$中之开集。

定理36　$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$或$\boldsymbol{d}=c$皆蕴涵序假设。

定理37　如果序假设成立，则$\square^{\omega}Q$是超仿紧的。

推论38（$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$或$\boldsymbol{d}=c$）　$\square^{\omega}Q$是仿紧的。

参考文献

〔1〕H.Tietze, Beitrage zur allgemeinen topologie I. Math. Ann., 88, 280-312.

〔2〕C.T.Knight, Box topologies, Quart. J.Math, (12) 15 (1964), 41-54.

〔3〕M.E.Rudin, The box product of countably many compact metric spaces.General Topology and Applications, 2 (1972), 293-296.
〔4〕R.Engelking, General Topology, Warszawa, 1977.
〔5〕E.K.van Douwen, The box product of countably many metrizable spaces need not be normal, Fund, Math., 88 (1975), 127-132.
〔6〕——,Covering and separation properties of box products, Surveys in General Topology, Academic Press, (1980), 55-129.
〔7〕M.E.Rudin, Lecture on Set-theoretic Topology, Conference Series in Math. №23, AMS,Providence, RI (1975).
〔8〕R.Engelking and M. Karlowicz, Some theorems of set theory and their topological consequences,Fund. Math. 57 (1965), 275-285; Corollary on p.282. MR 33*4880.
〔9〕E.K. van Douwen, The integers and topology, Handbook of Set-theoritic Topology, Edited by K. Kunen and J.Vaughan, North-Holland, 1984, 111-168.
〔10〕S.H.Hechler, on the existence of certain cofinal subsets of $^{\omega}\omega$, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 13, part Ⅱ, AMS, Providence (1974), 155-174.
〔11〕K.Kunen, On paracompactness of box products of compact spaces, TAMS 240 (1978), 307-316
〔12〕杨守廉和S.Williams, 关于序数空间小族的 箱积. 科学通报14 (1987) 1051-1053; 英文版Vol.33, №7,

April 1988, 554-556.
〔13〕 S.Yang and S.Williams, On the countable box product of compact ordinals, Topology Proceedings, Vol.12, 1987.
〔14〕 杨守廉，关于紧序数空间可数次箱积的仿紧性，数学学报 34，6(1991)789-808.
〔15〕 L.B.Lawrence, The box product of countably many copies of the rationals is consistently paracompact. appear in AMS Transactions.
〔16〕 P.Erdös and R.Rado, Intersection theorem for systems of sets, Journ. London Math. 6, 1936, 18-19
〔17〕 E.Michael, A note on intersections. Proc. Amer. Math. Soc. 13, 1962, 281-283.

第五章　Stone-Čech紧化空间$\beta\omega$中的独立性结果

离散空间ω的Stone-Čech紧化$\beta\omega$的研究是一般拓扑中最重要的领域之一；它也是集合论的重要研究领域，又为无限组合、布尔代数等方面的学者所关注．在众多的数学分支中有着广泛的应用．这里的基本问题有两个：一是对空间中点的分类的研究，二是空间中子集构造的研究．前者起源于空间中各点是否拓扑同胚这一问题的回答，即齐性（homogeneity）问题的研究．本章将阐述这一研究中笔者涉足的几个方面．

有人把$\beta\omega$喻为三头怪物．第一个头长在CH（Continuum Hypothesis）上，这是一付微笑着的使人感到舒适顺通的面孔．第二个头长在┐CH上，这是一付变幻莫测的怪相．$\beta\omega$中几乎没有一个open problem在CH下不能得到确定的回答．近70年代末，$\beta\omega$的研究进入了一个新时期，大量的结果揭示了这样一个事实，在┐CH下，几乎大部分CH下成立的结果均可推翻！$\beta\omega$转过身来，又以令人扑朔迷离的模样面对着它的追求者．第三个头长在ZFC（Zermelo-Fraenkel公理体系＋Choice公理）上，它还是一个异常模糊的形象，人们对它所知甚少．

本章中涉及的一些基本概念及基本定理均可在〔1〕，〔2〕和〔3〕中找到．

本章中所述空间都是完全正则（completely regular）空间．

§1　零集与C嵌入

拓扑空间X的紧化空间（compactification）是指一个紧空间

K，关于它存在着一个嵌入映射（embedding）$e: X\to K$，使X的像$e[X]$在K中是稠密的。紧化空间常简称为紧化。因为e是嵌入映射，即X和$e[X]$是同胚的，我们常把X和$e[X]$看作等同，而视X为K之子空间。

关于紧化的最基本的理论，只在这里作一简述，详细的证明可见[4]和[5]。对Stone-Čech紧化的刻划及基本理论则略尽其详。在简述部分，所提及的拓扑空间不要求是完全正则的。

拓扑空间X的**单点紧化**系指紧空间$X^* = X\cup\{\infty\}$，其中∞不同于X中任一点，X^*中的拓扑为：$\{u: u$为X中之开集$\}\cup\{u: X^*\setminus u$为$X$中之闭紧子集$\}$。

命题1 X^*是紧空间。X^*是T_2的当且仅当X是局部紧和T_2的。

当紧化空间是T_2空间时，称为**Hausdorff紧化**。

设K是X的紧化；嵌入映射为e，为明确起见用$\langle e, K\rangle$来记这个紧化。单点紧化可记作$\langle I, X\rangle$，其中I为恒等映射。X的两个紧化$\langle f, Y\rangle$，$\langle g, Z\rangle$，如果满足以下条件，则称$\langle g, Z\rangle\leqslant\langle f, Y\rangle$：存在连续到上的映射$h$：$Y\to Z$使$h\circ f = g$。

命题2 拓扑空间的一切Hausdorff紧化在关系"$\leqslant$"下是一个偏序集。

如果X本身就是紧空间，则$\langle I, X\rangle$便是这个编序集之最小元；事实上，在同胚的意义下，此时只有一个紧化。如果X不是紧空间，则单点紧化为极小元。

设F是X上一组连续函数之集。对每个$f\in F$，记X的像为拓扑空间Y_f；$f: X\to Y_f$。由下式确定的映射

$$e: X\to\Pi\{Y_f: f\in F\}$$

称为**赋值映射**（evaluation map）：

$$(e(x))_f = f(x),\quad x\in X,$$

其中$(e(x))_f$表示像$e(x)\in\Pi\{Y_f: f\in F\}$在第$f$个乘积因子$Y_f$上

的投影。

如果对X中的任意两点x，y，存在$f\in \boldsymbol{F}$，使$f(x)\neq f(y)$，则称$\boldsymbol{F}$**能区分点**。如果对每个$x\in X$，和每个闭集$A\subset X$，$x\notin A$，存在$f\in F$，使$f(x)\notin \overline{f(A)}$，则称$\boldsymbol{F}$**能区分点和闭集**。

命题3　（a）赋值映射e是X到$\Pi\{Y_f: f\in F\}$的连续映射。

（b）如果F能区分点和闭集，则e是一个开映射。

（c）如果F能区分点，则e是1-1的。

命题4　完全正则空间之乘积是完全正则空间。

若以$F(X)$表示X上取值于〔0，1〕的一切连续函数之族，则由命题3可知当X是完全正则空间时，X能嵌入到$[0,1]^{F(X)}$中。反过来，若X能嵌入到一个〔0，1〕方块（cube，即〔0，1〕之乘积空间）中，由命题4可知X便是完全正则空间。故有下述定理。

命题5（嵌入定理）　拓扑空间是完全正则的充要条件是能嵌入到某个〔0，1〕方块中。

由此立即可得

命题6　拓扑空间是完全正则的充要条件是它能嵌入到某个紧的T_2空间中。

这也就是说拓扑空间存在Hausdorff紧化的充要条件为它是完全正则空间。

设X是完全正则空间，e为赋值映射，则$e[X]$在$\Pi\{Y_f: f\in F(X)\}$中的闭包称为X的**Stone-Čech紧化**，记作βX。

命题7（Stone-Čech定理）　设X是完全正则空间，Y是紧空间，$f: X\to Y$是连续函数，则必存在f在βX中的连续延拓$\tilde{f}: \beta X\to Y$。

这个定理刻划了Stone-Čech紧化的根本特征，并且告诉我们，关于X紧化空间族中的偏序$\leqslant$，Stone-Čech紧化在同胚的意义下是最大的一个。

Čech在1937年应用这种嵌入方法来研究βX的性质，因此我

们常把这种紧化方法称为Čech方式，Stone则是通过布尔环（Boolean ring）的应用来研究代数和拓扑的关系而得到紧化的结果的。但是这种非构造性的Čech方式在研究βX的各种性质时却不是很有效的。本章中将用Wallman方式，即用Z超滤的方法来刻划紧化。Wallman是在处理T_1紧化时应用了超滤刻划的方法，以后人们改进后用以处理Stone-Čech紧化。§2中将阐述在Wallman方式下Stone-Čech紧化的最基本的理论。

设X是一拓扑空间。$C(X)$表示X上一切实值连续函数组成之族。$C^*(X)$表示X上一切连续、有界实值函数组成之族。显然$C^*(X)\subset C(X)$。

设$A\subset X$。如果存在$f\in C(X)$，使$A=f^{-1}(0)$，则称A是X的**零集**。零集的余集称为**余零集**。在这个定义中，$C(X)$也可改为$C^*(X)$。事实上，如果$A={}^{-1}(0)$，$f\in C(X)$，可令$g=|f|\wedge 1$；这里，若F，G是X上的两个实值函数，则用$G\wedge F$表示由公式$(G\wedge F)(x)=\min(G(x),F(x))$定值的函数。$G\vee F$则表示由公式$(G\vee F)(x)=\max(G(x),F(x))$定值的函数。显然$g\in C^*(X)$，且$A=g^{-1}(0)$。

零集必为闭集，余零集必为开集，但反过来不真。

设r是一个实数，$f\in C(X)$。不难验证$f^{-1}(r)$，$f^{-1}[[r,+\infty)]$，$f^{-1}[(-\infty,r]]$也都是零集。

定理8 零集是G_δ集，余零集是F_σ集。

只要证明前一结论就够了。事实上$f^{-1}(0)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left[\left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right]$；可见结论为真。

定理9 有限个零集的并是零集，可数个零集之交是零集。

证 关于并，只要证两个零集之并是零集就够了。设$A=f^{-1}(0)$，$B=g^{-1}(0)$，f，$g\in C(X)$。那么$A\cup B=(f\circ g)^{-1}(0)$，

而$f\circ g\in C(X)$，可见$A\cup B$亦为零集。

现设$A_n=g_n^{-1}(0)$，$g_n\in C(X)$，$n<\omega$、令$f_n=|g_n|\wedge 2^{-n}$，则仍有$f_n\in C(X)$，且$A_n=f_n^{-1}(0)$。若令f由

$$f(x)=\sum_{n<\omega}f_n(x),\quad x\in X,$$

确定，则容易验证f仍为连续函数，且

$$f^{-1}(0)=\bigcap_{n<\omega}f_n^{-1}(0)=\bigcap_{n<\omega}A_n,$$

可见零集之可数交仍为零集。　　证毕

定理10　在度量空间中，闭集即为零集。

证　如果A是度量空间中之闭集，$\rho(x,y)$表示x,y两点间之距离。令$f(x)=\rho(x,A)=\min\{\rho(x,y):y\in A\}$，则$f$为连续函数，而$A=f^{-1}(0)$。

要举出一个闭集而非零集的例子不是三言两语能办到的，但指出下述事实并不费事：如果X是完全正则空间但不是正规空间(normal space)，则X中必存在一个闭集它不是零集。事实上，这样的空间中必存在两个不能完全分离的不交闭集A,B。可以证明，A，B都不是零集。事实上，如果有$f\in C^*(X)$，使$A=f^{-1}(0)$，则必有

$$\inf\{|f(x)|:x\in B\}=0. \tag{1}$$

否则，如果$b=\inf\{|f(x)|:x\in B\}>0$，那么$|f|\wedge b=g$便能使$g[A]=\{0\}$，$g[B]=\{b\}$；从而说明$A$、$B$可完全分离的了。由于$B$是闭集，据（1）必存在$y\in B$使$|f(y)|=0$，亦即$f(y)=0$。这与$A=f^{-1}(0)$且$A\cap B=\phi$是矛盾的。　　证毕

零集是一个极为重要的概念，其与完全正则空间实有不解之缘，从以下两个事实便可看出。

定理11　两集是完全可分的充要条件是它们能分别包含于两个不交的零集中。

证　先证充分性。设A、B为X中之两集，$A\subset Z_0$，$B\subset Z_1$，$Z_0=f^{-1}(0)$，$Z_1=g^{-1}(0)$，且$Z_0\cap Z_1=\phi$，其中f，$g\in C(X)$。

今令 h 为由下式确定的函数：

$$h(x)=\frac{|f(x)|}{|f(x)|+|g(x)|},\quad x\in X.$$

显然 $h\in C(X)$，且 $h[A]=\{0\}$，$h[B]=\{1\}$，即 h 可完全分离 A，B。

再证必要性，设 A，B 是可完全分离的两集；即存在 $f\in C(X)$ 使 $f[A]=\{0\}$，$f[B]=\{1\}$。则令 $Z_0=\left\{x\in X: f(x)\leqslant\frac{1}{3}\right\}$，$Z_1=\left\{x\in X: f(x)\geqslant\frac{2}{3}\right\}$ 便是分别包含 A、B 的不交零集。证毕

定理12 X 是完全正则空间的充要条件是零集族 $Z(X)$ 构成闭集基（即任一闭集都能表示为若干零集的交）；或说余零集族 $CZ(X)$ 构成 X 的拓扑基。

证 先证必要性。设 A 是 X 中之闭集。由于 X 是完全正则空间，对每个 $x\in X\setminus A$，存在 $f_x\in C(X)$，使 $f_x(x)=1$，$f_x[A]=\{0\}$。令 $A_x=f_x^{-1}(0)$，则 $A\subset A_x$，而 $x\notin A_x$。容易看出

$$A=\bigcap\{A_x: x\in X\setminus A\}.$$

再证充分性。设 $x\in X\setminus A$，A 是闭集。由于 $Z(X)$ 是闭集基，所以存在零集族 $\mathscr{F}\subset Z(X)$，使 $A=\bigcap\mathscr{F}$。但因 $x\notin A$，故必存在 $F\in\mathscr{F}$ 使 $x\notin F$。F 是零集，设 $F=f^{-1}(0)$，$f\in C(X)$，那么 $f(x)\neq 0$。由此便知 x 和 A 可完全分离。证毕

设 S 是 X 之子空间，若对每个 $f\in C(S)$，必有 $g\in C(X)$ 使 $f\subset g$，则称 S **是可 C 嵌入于 X 的**。如果把上述定义中的 C 改为 C^*，则称 S **是可 C^* 嵌入于 X 的**。

若 S 是可 C 嵌入于 X 的，则必定是 C^* 嵌入于 X 的；因为一个有界连续函数之连续延拓必定仍为有界。但反过来却是不正确的。下面是一个简单的反例。设 $\Sigma=\omega\cup\{\omega\}$。$\Sigma$ 之拓扑规定为：每个 $n\in\omega$，$\{n\}$ 都是开集；而 ω 之开邻域族为 $\{u\cup\{\omega\}: u\in\mathscr{U}\}$；

其中$\mathscr{U}$是ω上的一个自由超滤（free ultrafilter）。在这个例子中集ω作为Σ之子空间是C^*嵌入的，但却不是C嵌入的。事实上，如果$f\in C^*(\omega)$，则在超滤收敛的意义下必存在唯一的实数a，使$\lim\limits_{\mathscr{U}} f(n)=a$。若令$f^*(\omega)=a$，$f^*(n)=f(n)$，$n\in\omega$，显然$f^*\in C^*(\Sigma)$且$f\subset f^*$；可见$\omega$是$C^*$嵌入于$\Sigma$的。但$\omega$却不是$C$嵌入于$\Sigma$的，因为当令$f(n)=n$时，$f\in C(\omega)$，但$f$在$\Sigma$中不存在连续的延拓。

定理13 设S是C^*嵌入于X的子空间，S是C嵌入于X的充要条件是它和每个与它不交的零集是可完全分离的。

证 先证必要性。设Z是任一零集，$Z=h^{-1}(0)$，$h\in C(X)$，且$S\cap Z=\phi$。令

$$f(t)=1/h(t),\ t\in S.$$

则$f\in C(S)$。据条件知f是C嵌入的，故存在$g\in C(X)$使$f\subset g$。则$g\cdot\circ\in C(X)$可完全分离Z和S。

再证充分性。设$f\in C(S)$，则

$$\mathrm{tg}^{-1}\circ f\in C^*(S).$$

据条件，存在$g\in C^*(X)$使$\mathrm{tg}^{-1}\circ f\subset g$。再设

$$Z=\left\{x\in X:|g(x)|\geqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

则Z是零集且$Z\cap S=\phi$，据条件S和Z是可完全分离的，故存在$h\in C(X)$，使$h[S]=\{1\}$，$h[Z]=\{0\}$，可以断定函数$\mathrm{tg}\circ(gh)$便是f在X上的连续延拓。事实上，注意到$h[S]=\{1\}$，$\mathrm{tg}^{-1}\circ f\subset g$，便可知

$$(gh)|S=\mathrm{tg}^{-1}\circ f. \tag{2}$$

（设F是一函数，S是F的定子域之子集，则$F|S$表示F限制在S上所得的函数）这里要注意gh表示乘积函数而不是$g\circ h$。由（2）式便知$(\mathrm{tg}\circ(gh))|S=f$，从而知

$$f\subset\mathrm{tg}\circ(gh),$$

可见 S 为 C 嵌入集． 证毕

C^*嵌入是极其重要的概念，它是 Stone-Čech 紧化的一个实质性刻划．而关于这一概念的描述最重要的莫过于 Urysohn延拓定理了．

定理14（Urysohn延拓定理） X的子空间S是C^*嵌入于X的充要条件是S中任意两个可完全分离的集在X中也是完全可分离的．

证 先证必要性．设 A、B 是 S 中两个可完全分离的集；即存在 $f\in C^*(S)$使$f[A]=\{0\}$，$f[B]=\{1\}$．则据条件必存在 $g\in C^*(X)$使$f\subset g$，因而仍有 $g[A]=\{0\}$，$g[B]=\{1\}$；这说明 A、B在X中也是可完全分离的．

再证充分性．设$f_1\in C^*(S)$，则存在自然数m使$|f_1(x)|\leqslant m$，$x\in S$．令

$$r_n=\frac{m}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\quad n=1,2,\cdots,$$

则$|f_1(x)|\leqslant 3r_1$．再令

$$A_1=\{t\in S: f_1(t)\leqslant -r_1\},\quad B_1=\{t\in S: f_1(t)\geqslant r_1\}$$

则A_1，B_1在S中可完全分离，由所设前提它们在X中也可完全分离；即存在 $g_1\in C^*(X)$ 使 $g_1[A_1]=\{-r_1\}$，$g_1[B_1]=\{r_1\}$ 而 $|g_1(x)|\leqslant r_1$对一切$x\in X$成立．

一般地，如果确定了$f_n\in C^*(S)$，满足

$$|f_n(x)|\leqslant 3r_n,\quad x\in S, \tag{3}$$

则令 $A_n=\{t\in S: f_n(t)\leqslant -r_n\}$，$B_n=\{t\in S: f_n(t)\geqslant r_n\}$．用同样的推理可确定 $g_n\in C^*(X)$，使 $g_n[A_n]=\{-r_n\}$，$g_n[B_n]=\{r_n\}$，且

$$|g_n(x)|\leqslant r_n,\quad x\in X. \tag{4}$$

今令

$$f_{n+1}=f_n-g_n|S. \tag{5}$$

易知$|f_{n+1}(x)|\leqslant 2r_n$对一切$x\in S$成立，于是有

$$|f_{n+1}(x)|\leqslant 3r_{n+1},\quad x\in S.$$

综上所述我们可归纳地得到$\{f_n\in C^*(S):n=1,2,\cdots\}$且（3），（4）、（5）对一切$n$成立。

令g由下式确定

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x),\quad x\in X.$$

由（4）知级数是一致收敛的，所以g是连续函数。又若记$b=\sum_{n=1}^{\infty}r_n$，则$|g(x)|\leqslant b$，$x\in X$；故$g\in C^*(X)$。再注意到由（5）式可得

$$(g_1+g_2+\cdots+g_n)\upharpoonright S=(f_1-f_2)+\cdots+(f_n-f_{n+1})$$
$$=f_1-f_{n+1},$$

而由（3）式知对每个$x\in S$，$f_{n+1}(x)\to 0(n\to\infty)$，所以$g(x)=f_1(x)(x\in S)$，即$f_1\subset g$。　　证毕

推论15　正规空间中的闭子集是C^*嵌入的。

证　设X是正规空间，S是X之闭子集。再设A，$B\subset S$，在子空间S中它们是可完全分离的，由定理11，可知在S中存在零集Z_0，Z_1，$Z_0\cap Z_1=\phi$，使$A\subset Z_0$，$B\subset Z_1$。由于S是闭集，所以Z_0，Z_1在X中仍是闭集。又由于X是正规空间，即T_4空间，由著名的Urysohn引理，它也是$T_{4\frac{1}{2}}$的，即任两个不交闭集在X中可完全分离。故Z_0，Z在X中可完全分离，从而知A，B在X中可完全分离；据定理14，S便是C^*嵌入的了。　　证毕

§2　z超滤与βX

βX表示空间X的Stone-Čech紧化。下面用z超滤加以刻划。

定义1　X中的**z-滤子**（z-filter）p系指非空零集的非空族，它满足：

（1）若A，$B\in p$，则$A\cap B\in p$；

（2）若$A\in p$，$B\in Z(X)$，$A\subset B$，则$B\in p$。

所有零集之族$Z(X)$显然满足上述条件，我们称它为非真的z滤子；我们讨论的仅为真z-滤子。

从这个定义我们看到了z-滤子与通常滤子的概念相比，不过是用零集代替了通常的子集而已。因此当我们企图平行地讨论z滤子的性质时，就要特别注意零集的特征。例如§1中告诉我们$Z(X)$对有限并和可数交是封闭的，但对可数并却不如此。例如$A=\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,\cdots\right\}\cup\{0\}$作为实数集$\mathbf{R}$之子空间，每个$\left\{\frac{1}{n}\right\}$都是$A$中的零集，而$\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,\cdots\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}$在$A$中并非零集。再譬如$Z(X)$对余运算当然是不封闭的，只是在余零集中（如果它非空的话）一定包含着其它非空的零集。这就构成了z滤子与普通滤子众多不同之处。普通滤子属于集合论的范畴，而z滤子则是具有拓扑内容的对象。

与通常的滤子理论一样，任何一个具有有限交性质（有限个元相交不空）的零集族Q可扩张成为一个z-滤子p，事实上，令

$$p=\{A\in Z(X):Q\text{中存在有限子集}\mathscr{F}\text{，使}\cap\mathscr{F}\subset A\}，$$

则不难验证p为z-滤子。

定义2　X中极大的z-滤子称为z-超滤（z-ultrafilter）。

在选择公理下，如果$\mathscr{F}\subset Z(X)$具有有限交性质，则存在z-

超滤p使$\mathscr{F}\subset p$。

定理16 p是X中z-超滤的充要条件是对任一$A\in Z(X)$，若$A\cap B\neq\phi$对每个$B\in p$都成立，则$A\in p$。

证 如果$A\in Z(X)$满足对一切$B\in p$，$A\cap B\neq\phi$，但$A\notin p$，那么$p\cup\{A\}$具有有限交性质。在选择公理下存在z-超滤$q\supset p\cup\{A\}$；这与p的极大性矛盾。

反过来，若$p\subset Z(X)$满足条件：使$A\cap B\neq\phi$对一切$B\in p$都成立的$A(\in Z(X))$必属于p，则p必为z-超滤。事实上，如果p不是z-超滤，则存在z-滤子$q\supsetneq p$；于是有$A\in q\setminus p$，而$A\cap B\neq\phi$对一切$B\in p$成立，这与p满足的条件矛盾。 证毕

用βX记X中一切z-超滤组成之集。设

$$\mathscr{B}=\{\{p\in\beta X: A\notin p\}: A\in Z(X)\},$$

容易验证它是一个拓扑子基。赋予βX以$\mathscr{B}$为子基产生之拓扑。下面将验证拓扑空间βX恰恰就是X的Stone-Čech紧化。

对每个$x\in X$，令

$$e(x)=\{A\in Z(X): x\in A\},$$

容易验证它是一个z-超滤，称为由x产生的**主z-超滤**。$e: X\to\beta X$称为**正规嵌入**（canonical embedding）。我们常把x与$e(x)$看作等同。$\beta X\setminus e(X)$中的元素就称作**自由z-超滤**。

引理17 设X是一空间，则下述命题成立。

（1）$\mathscr{B}$是βX的一个拓扑基。

（2）βX是紧空间。

（3）$cl_{\beta X}A=\{p\in\beta X: A\in p\}$，$A\in Z(X)$。

（4）X在βX中稠密。

（5）$cl_{\beta X}A\cap cl_{\beta X}B=cl_{\beta X}(A\cap B)$。

证 只证（1），（2），（3）。（4），（5）是（3）的简单推论。

（1）只要证$\mathscr{B}$对有限交封闭。设$B_1, B_2\in\mathscr{B}$，

$$B_i=\{p\in\beta X: A_i\notin p\},\quad i=0,\ 1,$$

其中$A_0, A_1 \in Z(X)$。则

$$B_0 \cap B_1 = \{p \in \beta X : A_0 \notin p \text{同时} A_1 \notin p\}.$$

因 p 是z-超滤，所以$A_0 \notin p$同时$A_1 \notin p$之充要条件是 $A_0 \cup A_1 \notin p$；事实上，$A_0 \in p$或$A_1 \in p$皆可推知$A_0 \cup A_1 \in p$；另外，如果 $A_0 \notin p$ 且$A_1 \notin p$，则必存在 $B_0, B_1 \in p$，使 $A_0 \cap B_0 = \phi$，$A_1 \cap B_1 = \phi$. 这是因为由定理16如果$A_i (i = 0, 1)$与p中所有元素相交皆不空可知$A_i \in p$. 由此得

$$(A_0 \cup A_1) \cap (B_0 \cap B_1) = \phi;$$

然而$B_0 \cap B_1 \in p$，所以$A_0 \cup A_1 \notin p$.

由上述充要条件即得

$$B_0 \cap B_1 = \{p \in \beta X : A_0 \cup A_1 \notin p\}.$$

显然$A_0 \cup A_1 \in Z(X)$；所以$B_0 \cap B_1 \in \mathscr{B}$.

（2）只要证明任一有有限交性质的闭集族有非空交. 据（1），只要证若$\{A_i : i \in I\} \subset Z(X)$且

$$\mathscr{S} = \{\{p \in \beta X : A_i \in p\} : i \in I\}$$

有有限交性质（注意形如$\{p \in \beta X : A \in p\}$的集构成闭集基），则

$$\bigcap_{i \in I} \{p \in \beta X : A_i \in p\} \neq \phi$$

即可. $\mathscr{S}$有有限交性质可推知$\{A_i : i \in I\}$亦具有有限交性质，这只要注意到

$$\{p \in \beta X : A_1 \in p\} \cap \{p \in \beta X : A_2 \in p\} = \{p \in \beta X : A_1 \cap A_2 \in p\}$$

便可知道。在选择公理下，存在 z-超滤 q 使$\{A_i : i \in I\} \subset q$. 于是

$$q \in \bigcap_{A \in q} \{p \in \beta X : A \in p\} \subset \bigcap_{i \in I} \{p \in \beta X : A_i \in p\}.$$

βX也是Hausdorff的. 任取p，$q \in \beta X$，$p \neq q$必存在 $A \in p$，$B \in q$使$A \cap B = \phi$. 不交的零集是可完全分离的（参见定理11），因此存在X的余零集C，D和零集E，F，使

$$A \subset C \subset E,\ B \subset D \subset F,\ E \cap F = \phi.$$

则$\{t \in \beta X : X \setminus C \notin t\}$，$\{t \in \beta X : X \setminus D \notin t\}$ 分别为 p，q 之开邻域，且

$$\{t\in\beta X:X\setminus C\notin t\}\cap\{t\in\beta X:X\setminus D\notin t\}$$
$$\subset\{t\in\beta X:E\in t\}\cap\{t\in\beta X:F\in t\}=\phi.$$

（3）设$A\in Z(X)$. $\{p\in\beta X:A\in p\}$在βX中闭，且$A\subset\{p\in\beta X:A\in p\}$，故

$$cl_{\beta X}A\subset\{p\in\beta X:A\in p\}.$$

反过来，设$p\in\beta X$，$A\in p$. 如果$p\notin cl_{\beta X}A$，则必存在p的开邻域与A的交为空集. 按（1）可设该领域为$\{t\in\beta X:B\notin t\}$，其中$B\in Z(X)$，$B\notin p$. 但

$$A\subset X\cap\{t\in\beta X:B\in t\}=B,$$

即有$A\subset B$；由此得$B\in p$；矛盾！ 证毕

定理18 设X是紧空间Y的稠密子集，则下列陈述都是等价的.

（1）X到紧空间的连续映射可连续地延拓到Y.

（2）X是Y中的C^*嵌入集.

（3）若A，$B\in Z(X)$且$A\cap B=\phi$，则

$$cl_Y A\cap cl_Y B=\phi.$$

（4）若A，$B\in Z(X)$，则

$$cl_Y A\cap cl_Y B=cl_Y(A\cap B).$$

（5）$\{A\in Z(X):p\in cl_Y A\}$是$X$中的$z$-滤子，其中$p\in Y$.

βX是满足这些条件的，进而言之，若Y满足这些条件，则必存在同胚映射（homeomorphism）$h:\beta X\to Y$使$h(p)=p$对一切$p\in X$都成立.

证 （1）⇒（2），显然.

（2）⇒（3）. 设$A,B\in Z(X)$且$A\cap B=\phi$. 因零集可完全分离，故存在连续函数$f:X\to[0,1]$使$A\subset f^{-1}(0)$，$B\subset f^{-1}(1)$. 按（2）存在f在Y的连续延拓$g:Y\to[0,1]$，那么当$p\in cl_Y A$时，$g(p)=0$；当$p\in cl_Y B$时，$g(p)=1$；故知（3）成立.

（3）⇒（4）. $cl_Y(A\cap B)\subset cl_Y A\cap cl_Y B$是显然的. 现设$p\in Y$，

$p\notin cl_Y(A\cap B)$。因Y是完全正则的，故存在$f\in C(Y)$使$f(p)=0$；而对$g\in cl_Y(A\cap B)$，$f(g)=1$。置$C=\left\{g\in Y: f(g)\leqslant\frac{1}{2}\right\}$，则$C$是$p$在$Y$中的邻域；且$A\cap B\cap C=\phi$。又因$A\cap C\in Z(X)$，$B\cap C\in Z(X)$，据（3）可得

$$cl_Y(A\cap C)\cap cl_Y(B\cap C)=\phi,$$

因此得$p\notin cl_YA\cap cl_YB$，否则将得到

$$p\in cl_Y(A\cap C)\cap cl_Y(B\cap C).$$

(4)⇒(5)。显然。

(5)⇒(1)。如果(1)不真，即有紧集K，连续函数$f: X\to K$不能连续地延拓到Y。此时必存在$p\in Y$，使f不能连续地延拓到$X\cup\{p\}$；否则如果对每个$p\in Y$，皆有连续函数$f_p: X\cup\{p\}\to K$使$f\subset f_p$，则$g=\cup\{f_p: p\in Y\}$便是f延拓到Y的连续函数了.记

$$\mathscr{F}=\{cl_Kf[u\cap X]: u是p在Y中的邻域\}.$$

则$\mathscr{F}\subset K$，且具有有限交性质．由于K紧，故$\cap\mathscr{F}\neq\phi$；进而还可断定$\cap\mathscr{F}$中至少含两个点；否则，如果$\cap\mathscr{F}=\{s\}$，则$f\cup\{\langle p, s\rangle\}$便是$f$在$X\cup\{p\}$上的连续延拓了．设$s$，$t\in\cap\mathscr{F}$，$s\neq t$。由于$K$完全正则，存在连续函数$h: K\to[0,1]$使$h(s)=0$，$h(t)=1$。令

$$A=h^{-1}\left(\left[0,\ \frac{1}{3}\right]\right),\quad B=h^{-1}\left(\left[1-\frac{1}{3},\ 1\right]\right),$$

A，B都是零集且其内部非空；$A\cap B=\phi$．由于$s\in A$，$t\in B$，A，B分别是s，t的领域，故对p的任一邻域u，有

$$A\cap f[u\cap X]\neq\phi,\ B\cap f[u\cap X]\neq\phi.$$

由此可得

$$f^{-1}[A]\cap(u\cap X)\neq\phi,\ f^{-1}[B]\cap(u\cap X)\neq\phi;$$

所以

$$p\in cl_Yf^{-1}(A)\cap cl_Yf^{-1}(B).$$

但 $f^{-1}(A)$，$f^{-1}(B)\in Z(X)$ 且 $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=\phi$；这样 $\{A\in Z(X): p\in cl_Y A\}$ 就不是 X 中的 z-超滤了，这与(5)矛盾。

下面证明满足上述条件的紧集 Y 是唯一的。因 βX 满足上述条件（定理17)，由(1) 存在连续函数 $h:\beta X\to Y$ 使 $h(p)=p$ 对一切 $p\in X$ 成立.又因 Y 也满足上述条件，所以存在 $k:Y\to\beta X$ 使 $k(p)=p$ 对一切 $p\in X$ 成立。则

$$k\circ h(p)=p,\ \ p\in X.$$

由于 $k\circ h$ 在 βX 上连续而 X 在 βX 中稠，所以 $k\circ h(p)=p$ 对一切 $p\in\beta X$ 成立；这说明 h 是 βX 到 Y 的同胚映射。　　　　证毕

由命题7和定理18可以知道在本节中刻划的紧空间 βX 和上一节中定义的Stone-Čech 紧化在同胚的意义下是同一个空间。

当 $X=\omega$，且赋予离散拓扑时，它的 Stone-Čech 紧化 $\beta\omega$ 便是本章中要研究的主要对象，对于离散空间，任何子集都是零集；因此 $\beta\omega$ 中的元 z-超滤都是普通的超滤。

§3　布尔代数与βX

设 $\langle B,\leqslant\rangle$ 为一偏序集（Partial order set)，$A\subset B$，A 的最小上界记作 $\bigvee A$；最大下界记作 $\bigwedge A$.如果对任意两个元 $a,b\in B$，$\bigvee\{a,b\}$，$\bigwedge\{a,b\}$ 都存在，则称 $\langle B,\leqslant\rangle$ 为**格**（lattice)，一个格 $\langle B,\leqslant\rangle$ 如果满足对任意的 $A\subset B$，$\bigvee A$，$\bigwedge A$ 都存在，则称为**完备格**（Complete lattice）如果格 $\langle B,\leqslant\rangle$ 包含元 0 和 1 使对一切 $x\in B$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 成立且对每个元 x，存在 $x'\in B$，使

$$x\vee x'=1,\ \ x\wedge x'=0,$$

则称格是**可余的**（complemented)，x' 称为 x 的**余**(complement)。如果对任意的 $x,y,z\in B$ 满足

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$
$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

则称格$\langle B, \leqslant\rangle$是**可分配的**（distributive）

可余，可分配的格称为**布尔代数**（Boolean algebra）

布尔代数作为格如果是完备的，则称为**完备的布尔代数**。

布尔代数B（以后把$\langle B, \leqslant\rangle$简记作$B$）中的滤子$p$是指满足下述条件的子集：（1）若$a,b\in p$,则$a\wedge b\in p$；（2）若$b\in p$，$b\leqslant a$，则$a\in p$。

布尔代数B自身显然是一个滤子，称为非真滤子，我们讨论的仅是真滤子。

布尔代数中的极大滤子称为超滤。

定理19 设p是布尔代数B中的一个真滤子，则下述陈述等价：

（1）p是超滤；

（2）若$a,b\in B$，且$a\vee b\in p$，则必有$a\in p$或$b\in p$；

（3）若$a\in B$，则$a\in p$或$a'\in p$。

证 （1）⇒（2）。若$a\vee b\in p$且$a\notin p$，则必存在$c\in p$，使$c\wedge a=0$；如果这样的c不存在，则必有$a\in p$。这样

$$b\geqslant b\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c\in p,$$

因此$b\in p$。

（2）⇒（3）。设$a\in B$因$a\vee a'=1\in p$，所以由（2）知$a\in p$或$a'\in p$。

（3）⇒（1）。设p满足（3）但p不是超滤，则存在超滤q使$p\subset q$；即存在$a\in q/p$。由于$a\notin p$，必有$a'\in p$；因而知$a'\in q$。由上述可得$a\wedge a'\in q$，即$0\in p$。我们讨论的仅为真滤子，因而$0\notin p$；导至矛盾。

证毕

布尔代数B的Stone空间，记作$\mathrm{St}(B)$是指赋予下述拓扑的B中一切超滤之集。对每个$a\in B$，令

$$\psi(a)=\{p\in\mathrm{St}(B): a\in p\}.$$

以

$$\psi(B)=\{\psi(a): a\in B\}$$

为子基产生之拓扑作为St(B)之拓扑。

设p是布尔代数B中的滤子。则

$$I=\{a\in B: \exists b\in p 使 b=a'\}$$

称为B中的**理想**（ideal）。显然B中的子集I是理想的充要条件是满足（i）若$a,b\in I$，则$a\vee b\in I$；（ii）若$b\in I$，$a\leqslant b$，则$a\in I$。

用fin表示$[\omega]^{<\omega}$；即由ω中有限子集组成之族。容易验证fin是布尔代数（$\mathscr{P}(\omega)$，$\leqslant$）之理想，其中$\mathscr{P}(\omega)$表示ω中一切子集组成之族；$A\leqslant B$意为$A\subset B$。$\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$表示以理想fin作模（modula）作成的商布尔代数（quctient Boolean algebra）；即若$A,B\in\mathscr{P}(\omega)$，$A\triangle B=(A\wedge B')\vee(B\wedge A')\in\mathrm{fin}$时称$A$，$B$为等价，由这个等价关系作成的商。在这一定义下，对$f,g\in\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$，如果$A\in f,B\in g$总有$A\subset^* B$，即$A\setminus B$为有限集，则称$f\leqslant g$。$\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$中的零元0即为包含空集的等价类，壹元1即为包含$\omega$的等价类。读者不难验证上述一切。

在布尔代数的刻划下，$\beta\omega$即可定义为St$(\mathscr{P}\omega))$。对每个$n<\omega$，视n与St$(\mathscr{P}(\omega))$中的元素$\{A\in\mathscr{P}(\omega): n\in A\}$等同。这一套布尔代数的语言与前节$z$-超滤的刻划方法完全是等同的，不再赘述。

布尔代数B到布尔代数C的映射h若满足：（1）$h(a\wedge b)=h(a)\wedge h(b)$；（2）$h(a\vee b)=h(a)\vee h(b)$；（3）$h(a')=(h(a))'$，则称$h$为$B$到$C$的**同态映射**（homomorphism）。如果同态映射又是1-1的，则称h是B到C的**嵌入**（embedding）。如果嵌入映射h又是到上的（surjective），则称h是B到C的**同构**（isomorphism）；此时常记作$B\approx C$。显然

$$\beta\omega/\omega\approx \mathrm{St}(\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}).$$

与前面一样，我们把$\{A\in\mathscr{P}(\omega): n\in\omega\}$，称为主超滤，而把$\beta\omega/\omega$中的元素称为自由超滤。

如果$A\subset\omega$，令

$$A^*=\{x\in\beta\omega/\omega: A\in x\}$$

从下面的定理我们将看到

$$\{A^*: A\in\mathscr{P}(\omega)\}$$

将是空间$\beta\omega/\omega$的拓扑基．自然地，我们可把$\beta\omega/\omega$记作ω^*．

空间X称为**完全不连通**（totally disconnected）的，如果对$p,q\in X$，$p\neq q$，必存在X的一个开闭子集A，使$p\in A$而$q\notin A$．这就是说任何两个点都不能包含在同一个连通集内；也就是说只有单点集才是连通集．

定理20 设B是布尔代数，则下述命题成立．

（1）$\psi(B)$是$\mathrm{St}(B)$的拓扑基．

（2）$\psi(B)\subset\mathscr{B}(\mathrm{St}(B))$（$\mathscr{B}(X)$表示$X$中一切开闭集组成之族）．

（3）$\mathrm{St}(B)$是紧空间，且是完全不连通的．

（4）$\psi: B\to\mathscr{B}(\mathrm{St}(B))$是布尔代数间的同构映射．

证 （1）首先$\psi(1)=\mathrm{St}(B)$，其次，对$a,b\in B$

$$\begin{aligned}\psi(a)\cap\psi(b)&=\{p\in\mathrm{St}(B): a\in p\}\cap\{p\in\mathrm{St}(B): b\in p\}\\&=\{p\in\mathrm{St}(B): a\wedge b\in p\}\\&=\psi(a\wedge b).\end{aligned}$$

（2）按$\mathrm{St}(B)$的拓扑之定义，$\psi(B)$中每个元都是开集．再之，对$a\in B$，

$$\begin{aligned}\psi(a)&=\{p\in\mathrm{St}(B): a\in p\}\\&=\{p\in\mathrm{St}(B): a'\notin p\}\\&=\mathrm{St}(B)\setminus\psi(a'),\end{aligned}$$

可见$\psi(a)$也是一个闭集．

（3）设$p,q\in\mathrm{St}(B)$且$p\neq q$．则存在$a\in p/q$，则$\psi(a)$含p但不含q；由（2），$\psi(a)$是开闭集，故知$\mathrm{St}(B)$是完全不连通的．

再设$\{\psi(a): a\in A\}$是$\mathrm{St}(B)$的一个复盖但不存在有限子复盖

其中A是B的子集。则族

$$\mathscr{F} = \{a' : a \in A\}$$

将具有有限交性质，因而在选择公理下存在 $p \in \mathrm{St}(B)$使$\mathscr{F} \subset p$，由于$\{\psi(a) : a \in A\}$是$\mathrm{St}(B)$的复盖，所以存在$a \in A$，使$p \in \psi(a)$，即$a \in p$。于是

$$0 = a \wedge a' \in p$$

这是不可能的；故$\mathrm{St}(B)$紧。

（4）首先证明ψ是1-1的。如果$a, b \in B$且$a \neq b$，则 $E = (a \setminus b) \vee (b \setminus a) \neq \phi$，这里$a \setminus b = a \wedge b'$。故存在 $p \in \mathrm{St}(B)$使$E \in p$，于是

$$p \in \psi[(a \setminus b) \vee (b \setminus a)].$$

在（1），（2）的证明中，事实上已证实了ψ是B到$\mathscr{B}(\mathrm{St}(B))$的布尔代数同态，故

$$p \in (\psi(a) \setminus \psi(b)) \vee (\psi(b) \setminus \psi(a)),$$

即得$\psi(a) \neq \psi(b)$。

剩下只要证明 $\mathscr{B}(\mathrm{St}(B)) \subset \psi(B)$，若 $A \in \mathscr{B}(\mathrm{St}(B))$，由（1）知存在$\{a_i : i \in I\} \subset B$使

$$A = \bigcup \{\psi(a_i) : i \in I\}.$$

因$\mathrm{St}(B)$紧，A亦紧，故存在有限个 $\psi(a_i)$ 使

$$\begin{aligned} A &= \psi(a_0) \cup \psi(a_1) \cup \cdots \cup \psi(a_n) \\ &= \psi(a_0 \vee a_1 \vee \cdots \vee a_n) \in \psi(B). \end{aligned}$$

证毕

以上我们看到了$\beta\omega$可用布尔代数的 Stone 空间来刻划。自然要问，对一般的拓扑空间X它的Stone-Čech紧化是否也能用布尔代数来刻划呢？由于 $\mathrm{St}(B)$一定是完全不连通的，所以一般来讲βX不能用布尔代数刻划。但是对一种与完全不连通空间有着紧密连系的空间——**强零维空间**（Stong zero-dimensional space）X βX便可用X中的也开集组成的布尔代数的Stone 空间来刻划。空

间X称为**零维**(zero-dimension)；是指它有开闭集组成的拓扑基；强零维是指对任意的 A，$B\in Z(X)$，$A\cap B=\phi$，必存在开闭子集C含A而$B\cap C=\phi$. 在本章中我们不准备展开这一理论；有兴趣的读者可参阅〔2〕.

§4 关于$\beta\omega\setminus\omega$的特征的独立性结果

设B是布尔代数，$F,G\subset B$，如果对一切$E\in[F]^{<\omega}$，$H\in[G]^{<\omega}$，总有$\vee E<\vee H$，就记作$F<G$，($[X]^{<\omega}$表示X中一切有限集组成之族).

若$F\in[B/\{1\}]^{\leqslant\omega}$和$G\in[B/\{0\}]^{\leqslant\omega}$有$F<G$，就一定存在$x\in B$使$F<\{x\}<G$，就称$B$满足**条件$H_\omega$**. ($[X]^{\leqslant\omega}$表示$X$中一切有限集和可数集组成之族).

引理21 $\mathscr{P}(\omega)/\text{fin}$满足条件$H_\omega$.

证 设$F,G\in[\mathscr{P}(\omega)/\text{fin}]^\omega$ ($[X]^\omega$表示X中一切可数集组成之族)；$1\notin F$，$0\notin G$且$F<G$. 记$F=\{f_n:n<\omega\}$，$G=\{g_n:n<\omega\}$. 由于$F<G$；不妨设$f_0<f_1<\cdots$，$g_0>g_1>\cdots$. 对每个$n<\omega$，设$A_n\in f_n$，$B_n\in g_n$. 我们可归纳地定义$d_k<\omega$，$k<\omega$，使

$$d_k\in\cap\{B_i:0\leqslant i\leqslant k\}\setminus(\bigcup_{0<i<k}A_i)\bigcup\{d_0,d_1,\cdots,d_{k-1}\}.$$

令

$$D=\{d_k:k<\omega\},\quad \widetilde{A}=\bigcup_{k<\omega}(A_k\cap(\bigcap_{0<i<k}B_i)),$$

而记$C=\widetilde{A}\cup D$，则$C\in[\omega]^\omega$且对每个$n<\omega$，有

$$|A_n\setminus C|<\omega,\quad |C\setminus B_n|<\omega.$$

设x是$\mathscr{P}(\omega)/\text{fin}$中的元，它是包含$C$的等价类；上面两个不等式相当于说$F<\{x\}<G$. 证毕

如果非空族$F\in[B\setminus\{1\}]^{<\omega}$，$G\in[B\setminus\{0\}]^{<\omega}$和$H\in[B]^{<\omega}$满足：(1) $F<G$；(2) 对一切$C\in[F]^{<\omega}$,$D\in[G]^{<\omega}$和$h\in H$，

总有$h\nleq\bigvee C$，$\bigwedge D\nleq h$，必存在$x\in B$，使$F<\{x\}<G$且对任意的$h\in H$，h和x不能比较；即$h\nleq x$且$x\nleq h$，则称B满足**条件R_ω**。

引理22 若布尔代数满足条件H_ω，则必满足条件R_ω。

证 设$F\in[B/\{1\}]^{\leqslant\omega}$，$G\in[B/\{0\}]^{\leqslant\omega}$，$H\in[B]^{\leqslant\omega}$。不妨设它们都是可数集；$F=\{f_n:n<\omega\}$，$G=\{g_n:n<\omega\}$，$H=\{h_n:n<\omega\}$。再设$F$，$G$，$H$满足条件$R_\omega$之前提；即$F<G$，且对$C\in[F]^{<\omega}$，$D\in[G]^{<\omega}$，$h\in H$，$h\nleq\bigvee C$，$\bigwedge D\nleq h$。这样，对任一$C\in[F]^{<\omega}$，应有$h\wedge(\bigvee C)'\nleq(\bigvee C)\wedge(\bigvee C)'=0$，即

$$(\bigvee C)'\wedge h\neq 0.$$

因此$\{0\}<\{f'\wedge h:f\in F\}$，应用条件$H_\omega$，知存在$d\in B$使

$$\{0\}<\{d\}<\{f'\wedge h:f\in F\}.$$

由此可知

$$d<h \text{ 且 } d\wedge f=0,\ f\in F.$$

故而对每个$n<\omega$，存在$d_n\in B\setminus\{0\}$，使

（1）$d_n<h_n$且对一切$f\in F$，$f\wedge d_n=0$。

类似地，应用条件H_ω，可确定$e_n\in B\setminus\{0\}$使

（2）$\{e_n\}<G$且对一切$h\in H$，$e_n\wedge h=0$。

规定 $\qquad \tilde{f}_n=f_n\vee e_n,\quad \tilde{g}_n=g_n\wedge d'_n$

则对一切$n,m<\omega$，有

$$\bigvee\{\tilde{f}_i:0\leqslant i\leqslant n\}\leqslant\bigwedge\{\tilde{g}_i:0\leqslant i\leqslant m\}. \qquad (1)$$

事实上，对任意的i：$0\leqslant i\leqslant n$，j：$0\leqslant j\leqslant m$，有

(i) $f_i<g_j$；这由$F<G$便可知道。

(ii) $e_i<g_j$；这由（2）得知。

(iii) $f_i\leqslant d'_j$；由（1），$f_i\wedge d_j=0$，故$(f_i\wedge d_j)\vee d'_j=d'_j$从而$f_i\vee d'_j=d'_j$，也就是$f_i\leqslant d'_j$。

(iV) $e_i\leqslant d'_j$；由（2），$e_i\wedge h_j=0$；再由（1）$d_j<h_j$故$d_j\wedge h_j=d_j$，从而$d_j\wedge e_i=d_j\wedge h_j\wedge e_i=0$；也就是$e_i\leqslant d'_j$。

由(i)—(iV)可知

$$f_i \vee e_i \leqslant g_j \wedge d'_j,$$

从而可知（1）式为真．对（1）再次应用条件 H_ω，可知存在 $x \in B$，使对一切 $n, m < \omega$，有

$$\vee\{\widetilde{f}_i : 0 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant x \leqslant \wedge\{\widetilde{g}_i : 0 \leqslant i \leqslant m\}. \qquad (2)$$

这个 x 就满足 R_ω 的要求；事实上，因对每个 e_i 有 $e_i \leqslant x$，而据(2) $e_i \wedge h = 0$，$h \in H$，所以 $x \nleqslant h$；若不然，$x \leqslant h$ 将导至 $e_i \leqslant h$．另一方面，因 $x \leqslant d'_i$ 而由（1）$d_i < h_i$，所以 $h_i \nleqslant x$；若不然 $h_i \leqslant x$ 将导至 $h_i \leqslant d'_i$ 这与 $d_i < h_i$ 矛盾．h_i 是 H 中任一元，所以，$h \nleqslant x, h \in H$．以上说明 x 与任一 $h \in H$ 不能比较．至于 $F < \{x\} < G$，可认为显然成立；因为由（2）式可得 $F \leqslant \{x\} \leqslant G$，而我们不妨设 $\bigvee_{i \leqslant n} f_i < \bigvee_{i \leqslant n+1} f_i$，$\bigwedge_{i \leqslant n} g_i > \bigwedge_{i \leqslant n+1} g_i$，这样必然有 $F < \{x\} < G$．　证毕

推论23　$\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 满足条件 R_ω．

在布尔代数 $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 中，$f \leqslant g$ 意味着对等价类 f，g 中的任意元素 $A \in f, B \in g$ 有 $A \subset^* B$；即 $A \setminus B$ 为有限集．因此所谓 $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 满足条件 H_ω 粗糙地说，就是若有 $\{A_n \in [\omega]^\omega : n < \omega\}$，$\{B_n \in [\omega]^\omega : n < \omega\}$ 满足 $A_0 \subsetneqq^* A_1 \subsetneqq^* A_2 \subsetneqq^* \cdots\cdots \subsetneqq^* B_2 \subsetneqq^* B_1 \subsetneqq^* B_0$；必存在 $C \in [\omega]^\omega$ 使 $A_n \subsetneqq^* C \subsetneqq^* B_n$ 对一切 n 成立，所谓满足条件 R_ω．粗糙地说，就是除上述条件外再设 $\{h_n \in [\omega]^\omega : n < \omega\}$ 中每个 h_n 与 A_i，B_j 皆不能 $\subset^*$ 比较，则必存在 C 介于一切 A_i，B_i 之间而与每个 h_n 不能 $\subset^*$ 比较．

下面这个定理刻划了 $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 的根本特征．

定理24(CH)　设布尔代数 B 满足条件 H_ω 且 $|B| = c = 2^\omega$，则 B 同构于 $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$．

证　设 B 和 E 是两个布尔代数，都满足条件 H_ω 且 $|B| = |E| = c$．在 CH 下，B，E 可排成 ω_1 列：

$$B = \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\},\quad E = \{e_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

不失一般性，可设 $b_0 = 0_B$，$e_0 = 0_E$，即分别是 B、E 中的零元．应用归纳法，对每个 $\alpha < \omega_1$，可构作可数的子代数 $B_\alpha \subset B$，$E_\alpha \subset E$

以及代数同构映射$\sigma_\alpha: B_\alpha \to E_\alpha$使

（1）$b_\alpha \in B_\alpha$，$e_\alpha \in E_\alpha$。

（2）若$\beta < \alpha$，则$B_\beta \subset B_\alpha$，$E_\beta \subset E_\alpha$且$\sigma_\alpha \upharpoonright B_\beta = \sigma_\beta$。这首先可设$B_0 = \{0_B, 1_B\}$，$E_0 = \{0_E, 1_E\}$，$\sigma_0: B_0 \to E_0$自然地规定$\sigma_0(0_B) = 0_E$，$\sigma_0(1_B) = 1_E$。再假设$B_\beta$，$E_\beta$，和$\sigma_\beta$对一切$\beta < \alpha(\alpha < \omega_1)$皆已确定且都满足(1)(2)两个条件。如果$b_\alpha \in \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$，$e_\alpha \in \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$，则规定$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$，$E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta$和$\sigma_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \sigma_\beta$，如果不是这样，例如$b_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$，则记$G = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$；令

$$G_0 = \{g \in G : g < b_\alpha\};$$

$$G_1 = \{g \in G : b_\alpha < g\};$$

$$G_2 = G \setminus (G_0 \cup G_1);$$

$$\sigma = \bigcup_{\beta<\alpha} \sigma_\beta.$$

据引理22存在$e \in E$，使

$$\sigma(G_0) < \{e\} < \sigma(G_1)$$

而对一切$d \in \sigma(G_2)$，e，d不能比较，置

$$\sigma(b_\alpha) = e，\sigma(b'_\alpha) = e'$$

则σ可延拓到$\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma}: \ll G \cup \{b_\alpha\} \gg \to \ll \sigma(G) \cup \{e\} \gg$$

（若B是布尔代数，$A \subset B$，则$\ll A \gg \subset B$表示由A产生的B的布尔子代数）．令

$$B_\alpha = \ll G \cup \{b_\alpha\} \gg，E_\alpha = \ll \sigma(G) \cup \{e\} \gg$$

B_α，E_α，$\tilde{\sigma} = \sigma_\alpha$仍将满足（1），（2）两个条件．如果$e_\alpha \notin \ll \sigma(G) \cup \{e\} \gg$，则将上述作法施加于$\ll \sigma(G) \cup \{e\} \gg$并以$\sigma^{-1}$代替$\sigma$便可得到满足$b_\alpha \in B_\alpha$，$e_\alpha \in E_\alpha$的$B_\alpha$，$E_\alpha$。最后，可得

$$B = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha，E = \bigcup_{\alpha<\omega_1} E_\alpha，\sigma = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \sigma_\alpha$$

σ便是B到E的同构映射．据推论23便知B，E皆同构于$\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$。

证毕

这个特征刻划对空间ω^*将意味着什么呢？下面我们将从拓扑的角度揭示这一特征刻划的内含。

若空间X的余零集都是X中的C^*嵌入集时，则称X是**F空间**。

关于F空间下面是一些众所周知的结果：

引理25 （1）X是F空间之充要条件为X中不交的余零集是完全可分离的。

（2）X是F空间之充要条件为βX是F空间。

（3）正规空间是F空间的充要条件是对任意两个不交的开F_σ子集在空间中有不交的闭包。

证 （1）设X是F空间，u，v是X的不交余零集。显然，$u\cup v$也是X的余零集。定义函数$f\in {}^{u\cup v}\{0,1\}$使$f(u)=\{0\}$，$f(v)=\{1\}$，则f在$u\cup v$上连续。因X是F空间，故f可连续地延拓到X，这个延拓函数便可完全地分离u和v。

现设X中不交的余零集是完全可分离的。u是X中的余零集。对u中任意两个不交的零集A，B，在X中是可完全分离的；事实上，A，B在u中当然是可完全分离的，因此存在余零集E，$F\subset u$，$E\cap F=\phi$，使$A\subset E$，$B\subset F$，由于u自身是X的余零集，所以E，F也是X中的余零集，由条件便知E，F在X中是可完全分离的。既然A，B在X中可完全分离，而X是βX之C^*嵌入集，故在βX中也是可完全分离的。所以

$$cl_{\beta X}A\cap cl_{\beta X}B=\phi.$$

若令$K=cl_{\beta X}u$，则也应有

$$cl_K A\cap cl_K B=\phi.$$

由定理18，知u是K中的C^*嵌入集。但K也是βX的C^*嵌入集（据著名的Tietze延拓定理：正规空间的闭子集是C嵌入集，因而也是C^*嵌入集；今βX紧故为正规空间），所以u也是βX中的C^*嵌入集。X是βX的子空间，因而u也是X中的C^*嵌入集；这说明X是F空间。

（2）设X是F空间，B是βX中的一个余零集，则$B\cap X$是X中的余零集；故$B\cap X$是C^*嵌入集。X又是βX的C^*嵌入集，所以$B\cap X$也是βX中的C^*嵌入集。注意到$B\cap X$是B中的稠集，由此可推知B是βX的C^*嵌入集；即βX为F空间。

现在反过来设βX是F空间，由（1）可知βX中不交的余零集是可完全分离的。再设A，B是X中两个不交的余零集；设$f,g\in {}^X R$满足$f(A)=X\setminus\{0\}$，$g(B)=X\setminus\{0\}$；还不妨设f,g非负。则若令$\widetilde{f}(x)=\min\{f(x),r\}$，$\widetilde{g}(x)=\min\{g(x),r\}$，其中$x\in X$，$r$为一正实数，则$\widetilde{f}$，$\widetilde{g}\in C^*(X)$且仍有$\widetilde{f}(A)=X\setminus\{0\}$，$\widetilde{g}(B)=X\setminus\{0\}$。由于$X$是$\beta X$的$C^*$嵌入集，$\widetilde{f}$，$\widetilde{g}$可连续地延拓到$\beta X$。按条件$\beta X$是$F$空间，故据（1），由$\widetilde{f}$，$\widetilde{g}$的延拓函数所确定的余零集$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$是完全可分离的；另外显然有$A\subset\widetilde{A}$，$B\subset\widetilde{B}$，从而知$A$，$B$在$\beta X$中因而在$X$中都可完全分离；这说明$X$是$F$空间。

（3）设正规空间X是F空间。由于正规空间的两个不交的闭集可完全分离(Urysohn引理)，由此可知可用两个不交的余零集将其分离。再据定理9，知可数个余零集的并仍为余零集。这样，便可知两个不交的F_σ集亦可用不交的余零集将其分离。X又是F空间，故由（1）知不交的余零集是可完全分离的；所以不交的F_σ集也可完全分离。这样，其闭包当然就不交的了。

反过来设X中任意两个不交的F_σ集有不交的闭包；又设u，v为X中不交的余零集。据定理8余零集是开的F_σ集，因而有不交的闭包。X是正规空间，不交的闭包可完全分离，所以u，v亦可完全分离；由（1），知X为F空间。　　　　证毕

下述引理告诉我们条件H_σ之拓扑含意。在§3中曾提到零维空间即有开闭集为拓扑基的空间；我们用$\mathscr{B}(X)$表示X中开闭子集组成之族，可以验证关于包含关系$\subset$所确定的偏序，它是一个布尔代数。

引理26 设X是紧的零维空间，则下述命题等价：

（1）$\mathscr{B}(X)$满足条件H_ω；

（2）X是F空间且X中每个非空G_δ集有无限的内部(interior)．

证 （1）⇒（2）．要证明X是F空间，据引理25（3），只要X中两个不交的开F_σ集有不交的闭包即可．设$E=\bigcup\limits_{n<\omega}E_n$，$F=\bigcup\limits_{n<\omega}F_n$，$E_n$，$F_n$皆为闭集而$E$，$F$为开集．由于X是紧且零维的，不妨假设$E_n$，$F_n$皆为开闭子集；否则因每个$E_n$都可用含于$E$内的有限个开闭子集复盖，这总共可数个开闭子集的并将与$\bigcup\limits_{n<\omega}E_n$相同，用以代替可数个$E_n$即可．令

$$\widetilde{E}_n=\bigcup_{i<n}E_i,\ \widetilde{F}_n=X\setminus\bigcup_{i<n}F_i,$$

则

$$\widetilde{E}_0\subset\widetilde{E}_1\subset\cdots,\cdots\subset\widetilde{F}_1\subset\widetilde{F}_0,$$

且$\widetilde{E}_n\subset\widetilde{F}_n$，$n<\omega$．由条件$H_\omega$必存在开闭子集$G$，使

$$\widetilde{E}_n\subset G\subset\widetilde{F}_n,\ n<\omega.$$

故可得$E\subset G$；由于G是闭的，因此$\bar{E}\subset G$．另一方面，由于G又是开集而$X\setminus\widetilde{F}_n\subset X\setminus G$；即$\bigcup\limits_{i<n}F_i\subset X\setminus G$，从而知$F\subset X\setminus G$．所以

$$\bar{E}\cap\bar{F}=\phi.$$

这就证明了X是F空间．

设$G=\bigcap\limits_{i<\omega}G_i$是$G_\delta$集且$G\neq\phi$．设$x_0\in G$．由于$X$是零维的，可找到$x_0$的可数个逐一包含的开闭邻域$\{E_0\supset E_1\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots\}$使$E_n\subset G$，$n<\omega$．由于$\bigcap\limits_{n<\omega}E_n$非空，由条件$H_\omega$，必存在开闭子集$E\subset\bigcap\limits_{n<\omega}G_n$；由此可知$G$之内部非空．

（2）⇒（1）证明方法雷同；不再赘述．

定理27（CH） 设X是一空间，则下述命题等价．

（1）X同胚于ω^*；

（2）X是紧的零维的F空间，其重度(weight)为c，且每个非空G_δ集有非空内部．

证 应用定理24和引理26可以建立起$\mathscr{B}(X)$和$\mathscr{P}(\omega)/\text{fin}$之间的同构对应，由此便知$X$和$\omega^*=\text{St}(\mathscr{P}(\omega)/\text{fin})$是拓扑同胚的；这就证明了(2)⇒(1)。(1)⇒(2)是显然的。 证毕

这个定理刻划了ω^*的拓扑特征。有趣的是在CH下的这一特征和关于$\mathscr{P}(\omega)/\text{fin}$的特征刻划（定理24）在$\neg$CH下完全可以推翻；因此这种刻划是独立于ZFC的。

定理28 设X是局部紧，σ紧和非紧的空间，则$X^*=\beta X/X$是F空间且每个非空G_δ集的内部皆为无限集。

证 设$F\subset X^*$是任一F_σ集，$f:F\to[0,1]$是连续函数。因为$Y=X\cup F$ σ紧，故它是正规的。又因F是Y中的闭集，故f能延拓为$\bar{f}:Y\to[0,1]$。令$g=\bar{f}\upharpoonright X$，$g$能延拓为$\bar{g}:\beta X\to[0,1]$。显然，$\bar{g}\upharpoonright F=f$。则$\tilde{f}=\bar{g}\upharpoonright X^*$是$f$在$X^*$上的延拓，这说明$X^*$是$F$空间，因为余零集总可表示为开的$F_\sigma$集，而上面又说明了任一$F_\sigma$集都是$C^*$嵌入的。

现在设$S\subset X^*$是一非空的G_δ集。对X中的任一开集u，令$\text{Ex}(u)=\beta X\setminus cl_{\beta X}(X\setminus u)$，则$\text{Ex}(u)$是$\beta X$中之开集且$\text{Ex}(u)\cap X=u$。容易验证$\{\text{Ex}(u):u$在$X$中开$\}$是$\beta X$之拓扑基。当令$u^*=\text{Ex}(u)\cap X^*$时，$\{u^*:u$在$X$中开$\}$便成为$X^*$的拓扑基了。由于$S$是非空的$G_\delta$集而$X$是局部紧的，我们可对每个$n<\omega$，确定$X$中的开集$u_n$使

$$\bar{u}_{n+1}\subset u_n,\quad \phi\neq\bigcap_{n<\omega}u_n^*\subset S,$$

这里$\bar{u}_{n+1}$是表示u_{n+1}在X中之闭包。

因X是局部紧，σ紧而非紧的空间，故可把X表示为$X=\bigcup_{n<\omega}K_n$，其中K_n紧，而且还不妨设对X中的每个紧集K总能包含于某个K_n中。

对每个$n<\omega$，选定一非空开集$v_n\subset u_n$使

$$\bar{v}_n\text{紧},\quad \bar{v}_n\cap K_n=\phi.$$

而令

$$v=\bigcup_{n<\omega}v_n,$$

这总是做得到的；因为$u_n^*\neq\phi$，所以$\bar{u}_n$不是紧的，因而u_n不能包含在某个K_n中。这样，对每个$n<\omega$，$v\setminus u_n\subset v_0\cup v_1\cup\cdots\cup v_{n-1}$；因而$v\setminus u_n$在$X$中有紧的闭包；故$cl_{\beta X}(v\setminus u_n)=\overline{v\setminus u_n}$，即知$[cl_{\beta X}(v\setminus u_n)]\cap X^*=\phi$。由此知$v^*\setminus u_n^*=\phi, n<\omega$；即$v^*\subset u_n^*$，$n<\omega$；于是

$$v^*\subset\bigcap_{n<\omega}u_n^*\subset S.$$

又因v不含于某个K_n中，所以v在X中没有紧的闭包；所以$v^*\neq\phi$，这就说明S有非空的内部。至于v^*为无限集则是很显然的，因若v^*为有限集，则v也是有限集，从而$\bar{v}$便是紧集；这与前述矛盾。

证毕

我们称一空间为**Parovičenko空间**是指该空间是紧的零维F空间，重度为c，且其中的每个非空G_δ集有无限的内部。下面我们给出两个Parovičenko空间的例子。

例1 设$\{C_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是$\omega^*$中开闭子集组成的序列；当$\alpha<\beta<\omega_1$时$C_\beta\subset C_\alpha$，设$P=\bigcap_{\alpha<\omega_1}C_\alpha$而令$S=\omega^*/P$；即$S$为在$\omega^*$中把$P$看成一个点而形成的商空间。在空间$S$中，点$P$的特征$\chi(P,S)=\omega_1$。

对于这个空间，Parovičenko空间的条件除了“F空间”这一条外都是很易验证的。下面我们来证明商空间S是F空间。

根据引理25，只要证明空间S中的任意两个不交的开F_σ集在S中有不交的闭包即可。现设u，v是S中两个不交的开F_σ集。如果u，v中均不包含点P，则因ω^*为F空间，当然有$\bar{u}\cap\bar{v}=\phi$。现在设$P\in v$，由于在ω^*中$P=\bigcap_{\alpha<\omega_1}C_\alpha$且$C_\alpha$都是开闭集，因此$\{C_\alpha/P:\alpha<\omega_1\}$是点$P$在$S$中之邻域基；这说明$\chi(P,S)=\omega_1$。

由于S是完全正则的，$P\in v$，而$\bar{u}\cap v=\phi$，故存在一个C_α/P使

$$(C_\alpha/P)\cap\bar{u}=\phi \qquad (1)$$

不妨设这个C_α/P是闭的G_δ集；事实上$C_\alpha/P\subset\bigcap_{i<\alpha}(C_{\alpha_i}/P)$即不

妨设存在ω个$\alpha_i<\alpha$，这样，

$$C_\alpha/P=\bigcap_{i<\omega}(C_\alpha/P)\cap(C_{\alpha_i}/P)$$

可见C_α/P是闭的G_δ集。从而知$v\setminus(C_\alpha/P)$是开的F_σ集。u和$v\setminus(C_\alpha/P)$是ω^*中不交的开F_σ集，由于ω^*是F空间，所以

$$\overline{u}\cap(\overline{v\setminus(C_\alpha/P)})=\phi. \qquad (2)$$

由(1)，(2)可知$\bar{u}\cap\bar{v}=\phi$.

例2 令$T=(\omega\times 2^c)^*$. 这里2^c表示空间$2=\{0,1\}$的c次Tychonoff乘积. 这是一个Parovičenko空间，这个空间每一点x的π-重度（π-weight）$\pi(x,T)=c$. π-重度的定义如下.

设X是一拓扑空间，$\mathscr{B}$是非空开集组成之族. 如果对空间中每一开集G，必存在$B\in\mathscr{B}$使$B\subset G$，则称$\mathscr{B}$为空间X的π基（π-base），$x\in X$，$\mathscr{A}$是非空开集组成之族. 如果对x的任一邻域u，存在$A\in\mathscr{A}$使$A\subset u$，则称$\mathscr{A}$是点x的局部π基(local π-base).

$$\pi(x,T)=\min\{|\mathscr{A}|:\mathscr{A}\text{是}T\text{中点}x\text{的局部}\pi\text{基}\}$$

显然由定义可知

$$\pi(x,T)\leqslant\chi(x,T).$$

空间T显然是紧的. 由于$\omega\times 2^c$是零维空间且重度为c，可知$(\omega\times 2^c)^*$也是零维空间，重度也是c. 再因$\omega\times 2^c$是局部紧，σ紧和非紧的，据定理28，T是F空间且每个非空G_δ集的内部皆为无限集. 因此T是Parovičenko空间.

下面证明$\pi(x,T)=c$对一切$x\in T$成立.

对每个$\alpha<c$，记2^c到第α个坐标的投影为$\pi_\alpha:2^c\to 2$. 令

$$K(\alpha,i)=T\cap(\omega\times\pi_\alpha^{-1}(i))^-,\ \alpha<c,\ i<2.$$

显然$K(\alpha,i)$是T的非空开闭子集. 并且当且仅当$\alpha=\beta$，$i=j$时$K(\alpha,i)=K(\beta,j)$. 令

$$\mathscr{K}=\{K(\alpha,i):\alpha<c,\ i<2\}.$$

命题 $\mathscr{K}$中ω_1个不同元素的交之内部定为空集.

这个命题的证明放在最后. 现设$x\in T$，$\mathscr{A}$是x的局部π基.

集族

$$F=\{K\in\mathscr{K}:x\in K\}$$

之基数为 c；事实上 $T=\beta(\omega\times2^c)\setminus(\omega\times2^c)=(\beta\omega\times2^c)\setminus(\omega\times2^c)=\omega^*\times2^c$，因此 x 可表示为$p\times f$，其中$p\in\omega^*$，$f\in2^c$，这就不难看出$K_{ai}(f(\alpha)=i)$ 包含x，而这样的K_{ai}共有 c 个。对每个$K\in F$，存在$u(K)\in\mathscr{A}$，使$u(K)\subset K$，因此

$$|\mathscr{A}|\geqslant|F|=c;$$

事实上根据上述命题，

$$|\{K\in\mathscr{K}:u(K)=u\}|\leqslant\omega,\ u\in\mathscr{A},$$

所以$|\mathscr{A}|\geqslant|F|$成立。

下面证明上述命题，只要证明$I=\bigcap_{\alpha<\omega_1}K(\alpha,0)$有空的内部即可。如果$I^0\neq\phi$，则必存在一开闭集$u\subset\beta(\omega\times2^c)$使

$$\phi\neq u\cap T\subset I.$$

对每个$\alpha<\omega_1$，$u\setminus(\omega\times\pi_\alpha^{-1}(0))$是$\omega\times2^c$之紧子集。又因为$u\cap(\omega\times2^c)$不是紧的，故存在$n_\alpha$使

$$\phi\neq u\cap(\{n_\alpha\}\times2^c)\subset\{n_\alpha\}\times\pi_\alpha^{-1}(0).$$

因为α有ω_1个，而 n 只有可数个，所以可找到一个 n 使

$$A=\{\alpha<\omega_1:n_\alpha=n\}$$

为无限集。这样

$$\{n\}\times\bigcap_{\alpha\in A}\pi_\alpha^{-1}(0)$$

便是$\{n\}\times2^c$之子集且有非空的内部；这是不可能的，因为此集内不含有任何基开集。 证毕

定理29 CH 等价于下述命题：所有基数为 c 而满足条件H_ω的布尔代数都是同构的。

证 CH⇒命题，即为定理24。现在设 CH不成立，即$\omega_1<c$。则例 1，例 2 给出的两个 Parovičenko 空间便不能同胚；因为例 1 中的空间 S 存在点 P，使 $\chi(P,S)=\omega_1$ 而在例 2 中的空间 T 的所

有点x，都有$\chi(x, T) \geqslant \pi(x, T) = \omega$。由引理26，布尔代数$\mathscr{B}(S)$，$\mathscr{B}(T)$都满足$H_\omega$条件；且不难验证$|\mathscr{B}(S)|$，$|\mathscr{B}(T)|$都是$c$；$S$，$T$不能同胚，可推知$\mathscr{B}(S)$，$\mathscr{B}(T)$不能同构，这说明命题不真。　证毕

这个定理说明定理24在$\urcorner$CH下是不成立的，因此这是一个独立于ZFC的结果，那么关于空间ω^*的特征刻划——定理27又如何呢？我们还不知道定理27所述的命题是否等价于CH；但是这也是一个独立于ZFC的结果，事实上我们有下述命题。

定理30（MA + $\urcorner$CH）　$(\omega \times 2^c)^*$与ω^*不是同胚的。

证　在例2的阐述中我们已证明了$(\omega + 2^c)^*$中存在基数为ω_1的开闭集族，其交非空但其内部是空的。但在ω^*中任何一个具有非空交的ω_1个开闭集，其交的内部是非空的，事实上，据第四章§3中的Booth定理，$MA \Rightarrow P(c)$原则；即在MA下，若$\mathscr{A}$是ω中无限集组成的具有强有限交性质之族，且$|\mathscr{A}| < c$，则必存在无限集B使

$$B \subset^* A, \quad A \in \mathscr{A}.$$

由于对每个$A \in \mathscr{A}$，A^*是ω^*中之开闭基集，所以上述包含式相当于说

$$B^* \subset A^*, \quad A \in \mathscr{A}.$$

现在设$\mathscr{C}$是ω^*中开闭子集组成之族，且$|\mathscr{C}| = \omega_1$，$\bigcap \mathscr{C} \neq \phi$；设$x \in \bigcap \mathscr{C}$。对每个$C \in \mathscr{C}$，可择定一基开集$A_C^*$（$A_C$为$\omega$中无限集），使$x \in A_C^* \subset C$，于是按前述Booth定理，存在$B \in [\omega]^\omega$使$B^* \subset A_C^* \subset C$，$C \in \mathscr{C}$；所以

$$B^* \subset \bigcap \mathscr{C}$$

B^*是开集，这说明$\cap \mathscr{C}$之内部不空。　证毕

$(\omega \times 2^C)^*$与ω^*都是紧的零维的F空间，重度为c，且每个非空G_δ集有非空内部，但在MA + $\urcorner$CH下却是不同胚的。这说明定理27在MA + $\urcorner$CH下是不成立的；这又是一个独立于ZFC的结果。

定理24和定理27都是由I.I.Parovičenko 给出的([8])。定理29则是由van Dauwen和van Mill在1978年给出的([9])。

§5 关于$\beta\omega$中C^*嵌入集的独立性结果

$\beta\omega$中的C^*嵌入集有一个有趣的特征：它不依赖于这个集在空间中的什么位置而依赖于这个集的一个拓扑特性——弱Lindelöf性质。一个空间称为**弱 Lindellöf 的**是指该空间任一个开复盖$\mathscr{U}$，存在一可数的子族$\mathscr{S}\subset\mathscr{U}$使$(\bigcup\mathscr{S})^- = X$。

定理31 如果$X\subset\beta\omega$是弱Lindolöf的，则X是$\beta\omega$中的C^*嵌入集。

证 根据定理18，只要证明X中的任意两个不交的零集在$\beta\omega$中有不交的闭包。设Z_0，Z_1是X中不交的零集。则据零集的性质，存在X中的开集u，v使$Z_0\subset u$，$Z_1\subset v$而$cl_X u\cap cl_X v=\phi$。对每个$x\in X$，设$C_x\subset\beta\omega$是x在$\beta\omega$中之开闭邻域且满足：

(1) 若$x\in cl_X u$，则$C_x\cap cl_X v=\phi$；

(2) 若$x\in cl_X v$，则$C_x\cap cl_X u=\phi$；

(3) 若$x\notin(cl_X u\cup cl_X v)$，则$C_x\cap(cl_X u\cup cl_X v)=\phi$。

因为X是弱Lindelöf的，存在一序列$\{x_n: n<\omega\}\subset X$使$\bigcup\{C_{x_n}\cap X: n<\omega\}$在$X$中稠。对每个$n<\omega$，令

$$E_n=C_{x_n}\setminus\bigcup_{i<n}C_{x_i},$$

则族$\{E_n: n<\omega\}$是$\beta\omega$中二二不交的开闭子集族且满足：

(1) $\bigcup\{E_n\cap X: n<\omega\}$在$X$中稠；

(2) 每个E_n至多与$cl_X u$和$cl_X v$中的一个相交。

令

$$E=\bigcup\{E_n: n<\omega\text{且}E_n\cap u\neq\phi\},$$

$$F=\bigcup\{E_n: n<\omega\text{且}E_n\cap v\neq\phi\}.$$

则$E\cap F=\phi$。由于E，F是$\beta\omega$中两个不交的开的F_σ集，据引理

25及$\beta\omega$是F空间，可知

$$\bar{E}\cap\bar{F}=\phi;$$

再因$Z_0\subset u\subset\bar{E}$，$Z_1\subset v\subset\bar{F}$，可见$Z_0$，$Z_1$在$\beta\omega$中有不交的闭包。

证毕

这个定理是由Comfort，Hindman和Negrepontis给出的(〔10〕)；但在〔10〕中给出的是更强的结果。

定理32（CH） 设$X\subset\beta\omega$。下述命题等价：

（1）X是弱Lindelöf的；

（2）X是$\beta\omega$中的C^*嵌入集；

（3）$|C^*(X)|=c$。

证 定理31已经证明了(1)⇒(2)。(2)⇒(3)是显然的，因为$|C^*(\beta\omega)|=c$；事实上，$\beta\omega$的每个有界连续函数都是某个$\omega\to[a,b]$（a，$b\in R$）的函数之延拓，而这样的函数总共只有c个。剩下只要证明(3)⇒(1)。

如果X不是弱Lindelöf的，则据CH，存在$\beta\omega$中开闭子集组成之族$\{C_\alpha:\alpha<\omega_1\}$使

（1）$X\subset\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}C_\alpha$，

（2）对每个$\alpha<\omega_1$，$X\setminus(\bigcup\limits_{\beta<\alpha}C_\beta\cap X)^-\neq\phi$。

我们可归纳地找出一列严格递增的序数列$K_\alpha<\omega_1$，$\alpha<\omega_1$且对每个$\alpha<\omega_1$，找到一开闭子集$D_\alpha\cap C_{K_\alpha}$使得下列条件被满足：

（3）$D_\alpha\cap X\neq\phi$，

（4）$D_\alpha\cap[\bigcup\limits_{\beta<\alpha}(C_\beta\cap X)\cup\bigcup\limits_{\beta<\alpha}(D_{K_\beta}\cap X)]^-=\phi$。

令 $\widetilde{C}_\alpha=C_\alpha\cap\bar{X}$，$\alpha<\omega_1$；$D=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}D_\alpha\cap\bar{X}$，可以证明$D$是$\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}\widetilde{C}_\alpha$中的$C^*$嵌入集。设$f:D\to[0,1]$。对每个$\alpha<\omega_1$，令

$$f_\alpha=f\restriction D\cap(\bigcup_{\beta<\alpha}\widetilde{C}_\beta)。$$

从（4）可以看出f_α的定义域是$\bar{X}$中的开F_σ集．对每个$\alpha<\omega_1$，我们可将f_α延拓到$\bigcup_{\beta<\alpha}\widetilde{C}_\beta$而得到

$$g_\alpha:\bigcup_{\beta<\alpha}\widetilde{C}_\beta\to[0,\ 1],\ f_\alpha\subset g_\alpha,$$

并且使对一切$\beta<\alpha$，有

$$g_\beta\subset g_\alpha;$$

事实上，这个延拓可归纳地完成；假若对一切$\beta<\alpha$，已将f_β延拓到g_β满足上述条件，那么函数$\bigcup_{\beta<\alpha}g_\beta\cup f_\alpha$是在$\bigcup_{\beta<\alpha}\widetilde{C}_\beta\bigcup(D\bigcap\widetilde{C}_\alpha)$上的连续函数．由于$\bigcup_{\beta<\alpha}\widetilde{C}_\beta\bigcup(D\cap\widetilde{C}_\alpha)$是$\bar{X}$中的开$F_\sigma$集；另一方面$\bar{X}$是$F$空间，这是因为$\beta\omega$是正规的$F$空间而$\bar{X}\subset\beta\omega$，因而根据引理25(3)可以推断出$\bar{X}$是$F$空间．于是可断定$\bigcup_{\beta<\alpha}g_\beta\bigcup f_\alpha$可延拓到$\bigcup_{\beta<\alpha}\widetilde{C}_\beta$而得到$g_\alpha$，最后，令

$$g=\bigcup_{\alpha<\omega_1}g_\alpha$$

显然g即为所求。

既然D是$\bigcup_{\alpha<\omega_1}\widetilde{C}_\alpha$中的$C^*$嵌入集；它又是$\omega_1$个二二不交非空开闭集之并。因此$|C^*(D)|\geqslant 2^{\omega_1}$，因而

$$|C^*(\bigcup_{\alpha<\omega_1}\widetilde{C}_\alpha)|\geqslant 2^{\omega_1}.$$

因为X是在$\bigcup_{\alpha<\omega_1}\widetilde{C}_\alpha$中稠密的，故而

$$|C^*(X)|\geqslant 2^{\omega_1}>c$$

这与（3）矛盾． 证毕

这个定理属于Woods（[12]）；但在[11]也是给出了一个较强的结果．不过这个结果在$\neg$CH下也是不成立的，因为我们有以下命题．

定理33 重度至多为c且极端不连通的紧空间能够嵌入到$\beta\omega$中．

所谓**极端不连通**（extremally disconnected）空间是指空间中开集的闭包仍为开集。

证 设X是重度至多为c且极端不连通的紧空间．则X能嵌入到Tychonof立方体I^c中，其中$I=[0,1]$（见[5]3.2.5）；不妨认为$X\subset I^c$．I是可分的，因此I^c也是可分的（见[5]2.3.16）．这样，就存在一个连续到上的映射$f:\beta\omega\to I^c$．令$g=f\restriction f^{-1}(X)$．

一个连续到上的映射$f:S\to T$称为**不可约的**（irreducible）是指对一切闭集$A\subset S$，$A\neq S$，必有$f(A)\neq T$．

对映射集$\{e\in A_X: A\subset f^{-1}(X),\ A$为闭集且$f(A)=X\}$关于反包含序应用Zorn引理，可得到包含意义下极小的闭集$Z\subset f^{-1}(X)$；容易看到

$$g\restriction Z:Z\to X$$

是不可约映射．剩下只要证明$h=g\restriction Z$是同胚映射即可．下面证h是1-1的．

设x，y是Z中不同的两个元素，由于$Z\subset\beta\omega$而$\beta\omega$是零维的，因此可以找到不交的开闭集u，v使$x\in u$，$y\in v$．因h是不可约的，故

$$\operatorname{int}h(u)\cap\operatorname{int}h(v)=\phi。$$

$$h(x)\in\overline{\operatorname{int}h(u)},\quad h(y)\in\overline{\operatorname{int}h(v)};$$

这是容易验证的，拿第一个等式来说，如果$w=\operatorname{int}h(u)\cap\operatorname{int}h(v)\neq\phi$，那么在$X$中$w$是一开闭子集．$h^{-1}(w)$便是$Z$中开闭子集．令

$$G=u\cup(v\setminus h^{-1}(w))\cup(Z\setminus(u\cup v))$$

则$G\subsetneqq Z$而$h(G)=X$，这与h的不可约性矛盾．再据X的极端不连通性，即有

$$\overline{\operatorname{int}h(u)}\cap\overline{\operatorname{int}h(V)}=\phi.$$

由此可断定$h(x)\neq h(y)$．

因f是连续的，故知h也连续．再从$h(x)\in\operatorname{int}h(u)$，$x\in u$，

便可知h^{-1}连续。 证毕

有了这个定理，便可断定定理32在$\neg$CH下是不成立的，事实上，我们有

定理34 $MA(\omega_2)+\neg CH \Rightarrow 2^{\omega_1}=c$而$\omega_1<c$。

证明可见[11]2.18。

这样，在$MA(\omega_1)+\neg CH$下，$\beta\omega_1$据定理33是可嵌入到$\beta\omega$；实际上可看作嵌入到ω^*（其中ω_1为离散空间）；因为若设嵌入映射是h，则$h(\beta\omega_1)\cap\omega$只能是有限集，否则$h(\omega_1)$就不是离散的了。$h(\omega_1)$显然是$\beta\omega$中之$C^*$嵌入集；但确不是弱Lindelöf的。这说明定理32不真。

§6 $\beta\omega$和ω^*的非齐性与P点存在的独立性

设X是一拓扑空间；$x,y\in X$。如果存在自同胚$h:X\to X$，使$h(x)=y$，则称x,y是点同胚的，若空间X中任何两点都是点同胚的，就称X是齐性的（homogeneous）。给定了X，特别是当X是齐性的时候，自然会问βX是否齐性。例如当X是离散空间，自然是一个齐性空间，βX如何呢？拿$\beta\omega$来说，它具有明显的非齐性。对每个点$n\in\omega$，$\{n\}$在$\beta\omega$中自然是闭集，因$\beta\omega$是T_1的；单点集自然是闭集。但另一方面

$$\{n\}=\{p\in\beta\omega:\omega\setminus\{n\}\notin p\}$$

（注意等式左端的n表示主超滤，等式右端的n表示自然数，以前曾声明，这两者常不加区别。）可见$\{n\}$又是开集；$\{n\}$是开闭集。而对于$p\in\beta\omega\setminus\omega$，即对于自由超滤来说，$\{p\}$是闭集却不是开集；若$\{p\}$是开集，$\beta\omega\setminus\{p\}$便是闭集了；但因$\omega\subset\beta\omega\setminus\{p\}$而$cl_{\beta\omega}\omega=\beta\omega$，所以$cl_{\beta\omega}(\beta\omega\setminus\{p\})=\beta\omega$，可见$\beta\omega\setminus\{p\}$不可能是闭集，所以$\{p\}$也不是开集。这样$n$和$p$是不可能是点同胚的。我们感兴趣的当然不是这个简单的事实；有趣的是以下两个

问题：

（1）$\beta X\setminus X$中任何两点在βX中看来是否点同胚？

（2）$\beta X\setminus X$中任何两点在$\beta X\setminus X$中看来是否点同胚？即$\beta X\setminus X$是否齐性？

在哪个空间中看是否齐性是有原则不同的。问题(1)是问对$\beta X\setminus X$中任何两点x，y是否存在自同胚h：$\beta X\to\beta X$使$h(x)=y$；而问题(2)是问是否存在从$\beta X\setminus X$到$\beta X\setminus X$的自同胚。

首先考虑对$X=\omega$时第一个问题的回答。我们可用讨论基数的办法对问题（1）作出否定的回答。

定理35 (a)存在ω的无限子集族$\{A_\alpha:\alpha<2^\omega\}$使当$\alpha<\beta<2^\omega$时，$|A_\alpha\cap A_\beta|<\omega$。

（b）存在集对组成之族$\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle:\alpha<2^\omega\}$，其中$A_\alpha^0$，$A_\alpha^1$为$\omega$的无限子集且$A_\alpha^0\cap A_\alpha^1=\phi$，使对任一有限集$F\subset 2^\omega$和任一函数$f:F\to 2$，有

$$|\cap\{A_\alpha^{f(\alpha)}:\alpha\in F\}|=\omega.$$

（c）$|\beta\omega|=2^{2^\omega}$.

证 对每个无理数r，择定一收敛于它的有理数列$S(r)$；$S(r)$作为一个集合一定是无限集.则$\{S(r):r$为无理数$\}$显然附合(a)的要求；不同的是$S(r)$不是ω的子集而是有理数集的子集。但有理数集是可数的，把它看作ω就可以了。这个证明是Sierpinski在1928年给出的([13])。

设$\{A_\alpha:\alpha<2^\omega\}$是由($a$)给出的集族。我们用$[\omega]^{<\omega}$记$\omega$中有限子集组成之族。令

$$B_\alpha^0=\{E\in[\omega]^{<\omega}:E\cap A_\alpha\neq\phi\},$$

$$B_\alpha^1=[\omega]^{<\omega}\setminus B_\alpha^0.$$

显然$B_\alpha^0\cap B_\alpha^1=\phi$。另外$\{\langle B_\alpha^0, B_\alpha^1\rangle:\alpha<2^\omega\}$也满足($b$)中其它要求。譬如当$F=\{\alpha_1, \alpha_2\}\subset 2^\omega$，$f:F\to 2$由$f(\alpha_1)=0$，$f(\alpha_2)=1$所确定时，定有$|B_{\alpha_1}^0\cap B_{\alpha_2}^1|=\omega$。事实上，因为$A_{\alpha_1}$，$A_{\alpha_2}$几乎不

交，任取有限集$E\subset A_{\alpha_1}\setminus A_{\alpha_2}$，则$E\cap A_{\alpha_1}\neq\phi$，$E\cap A_{\alpha_2}=\phi$；即$E\in B^0_{\alpha_1}\cap B^1_{\alpha_2}$。这样的$E$显然有无限个；故而$|B^0_{\alpha_1}\cap B^1_{\alpha_2}|=\omega$。一般情形下的证明也完全类似；留给读者完成。这样$\{\langle B^0_\alpha, B^1_\alpha\rangle:\alpha<2^\omega\}$便可充任(b)中要求的集对族了；不同的是它不是$\omega$的子集对，而是$[\omega]^{<\omega}$之子集对；这不妨碍(b)为真，只要把$[\omega]^{<\omega}$看作$\omega$就可以了。

下面证明(c)。${}^{(2^\omega)}2$表示定义在2^ω上取值于$\{0, 1\}$的一切函数组成之族。对每个$f\in{}^{(2^\omega)}2$，由(b)可知$\{A^{f(\alpha)}_\alpha:\alpha<2^\omega\}$是具有强有限交性质的族，因此存在超滤包含该族，择定一个这样的超滤，记作p_f；即有

$$\{A^{f(\alpha)}_\alpha:\alpha<2^\omega\}\subset p_f.$$

当f_1，$f_2\in{}^{(2^\omega)}2$而$f_1\neq f_2$时，即存在$\alpha\in 2^\omega$，使$f_1(\alpha)\neq f_2(\alpha)$时，据(b)有$A^{f_1(\alpha)}_\alpha\cap A^{f_2(\alpha)}_\alpha=\phi$。由于$A^{f_1(\alpha)}_\alpha\in p_{f_1}$，$A^{f_2(\alpha)}_\alpha\in p_{f_2}$，可见$p_{f_1}\neq p_{f_2}$。综上所述，有

$$|\beta\omega|\geqslant|\{p_f:f\in{}^{(2^\omega)}2\}|=2^{2^\omega}.$$

另一方面，因$|\mathscr{P}(\omega)|=2^\omega$，故$|\beta\omega|\leqslant 2^{2^\omega}$。故有$|\beta\omega|=2^{2^\omega}$。证毕

以上(b)的证明是由van Mill和C.Mills给出的，而(c)是由Hausdorff给出的([14])。

$\beta\omega$中有2^{2^ω}个元素，而$\beta\omega$中的自同胚映射有多少个呢？设f是$\beta\omega$中的自同胚映射。容易知道必有$f[\omega]=\omega$；即$f\upharpoonright\omega$必为1-1到上的函数。事实上，如果对某个$n\in\omega$使$f(n)\in\beta\omega\setminus\omega$，这将导至$f$把开集$\{n\}$映射为非开集$\{f(n)\}$；这是不可能的；所以$f[\omega]\subset\omega$。另一方面$f:\beta\omega\to\beta\omega$是1-1到上的，而自由超滤的象也不可能是$\omega$中的元，因此$\omega\subset f[\omega]$。由于$\omega$在$\beta\omega$中稠，以上说明$\beta\omega$中每个自同胚映射$f$都是$\omega$上某个排列（permutation）即$\omega$上1-1且到上的映射$g=f\upharpoonright\omega$之连续延拓。反过来说，$\omega$上每个排列$g$的Stone延拓显然是$\beta\omega$上的自同胚映射。由此看来，要问$\beta\omega$上的自同胚映射有多少，只要问$\omega$上的排列有几多就可以了，但后者我

们知道有$2^{\overline{\overline{\omega}}}$个。

$\beta\omega$上的自同胚只有2^{ω}个，所以对每个$p\in\beta\omega\setminus\omega$，至多有$2^{\omega}$个点与$p$点同胚；而$\beta\omega\setminus\omega$的基数是$2^{2^{\omega}}$，这说明$\beta\omega\setminus\omega$中一定存在与$p$不能点同胚的点。

所以问题（1）的回答是否定的。但上述证明虽然证明了$\beta\omega\setminus\omega$中各点在$\beta\omega$中看来并非齐性，但没有实在地举个两个不能点同胚的点。人们对这种证明还不十分满意；有人还称这种证明是非effective的。下面一节中将给出许多effective的证明；也就是要举出两个点，一个具有某种拓扑性质而另一个却不具有。当然这些证明并非单纯为了对齐性问题作一个是或非的回答，但至少是与此密切相关的问题。

拓扑空间X上的一点x如果它的任意可数个邻域的交仍为x的邻域，就称x为X的P点。因为$\beta\omega$是可分空间，因此在$\beta\omega$中不存在P点。在$\beta\omega\setminus\omega$中是否存在$P$点呢？在CH下容易得到肯定的回答。D.Booth证明了在MA下亦可推知P点存在（〔6〕）。但仅在ZFC下，P点是否存在呢？这一问题困惑了人们许多年。最后S.Shelah在1977年作出了回答（〔7〕）：$\beta\omega\setminus\omega$中不存在$P$点也与ZFC相容。这是20年来关于$\beta\omega$的最重要的结果之一。

如果$\beta\omega\setminus\omega$中存在$P$点，则必存在非$P$点，因为有如下定理。

定理36 若紧空间X的每个点都是P点，则X必为有限集。

证 若$|X|\geqslant\omega$，我们任取可数集$A\subset X$，可以断言每个$x\in X$都不可能是A的聚点（accumulation point），事实上，因X是T_2的，故对$y\in A\setminus\{x\}$，可以找到x的一个邻域u_y使$y\notin u_y$。一共有可数个u_y而x是P点，故存在邻域$u=\bigcap\{u_y: y\in A\setminus\{x\}\}$使$u\cap(A\setminus\{x\})=\phi$；这说明$x$不是$A$的聚点。无限子集$A$在$X$中没有聚点，这与$X$的紧性矛盾。

证毕

由于$\beta\omega\setminus\omega$是紧空间，若证明了$P$点的存在，也就相当于证明了在$\beta\omega\setminus\omega$中同时存在着$P$点和非$P$点；即存在着具有不同拓

扑性质的点．这就说明$\beta\omega\setminus\omega$是非齐的．同时，由于$\beta\omega\setminus\omega$是$\beta\omega$的子空间，$\beta\omega\setminus\omega$中的$P$点和非$P$点在$\beta\omega$中看来也不可能是点同胚的；所以这也相当于证明了$\beta\omega\setminus\omega$在$\beta\omega$中看也是非齐的．这个证明是effective的，但不是绝对结果，是相容于ZFC的结果．

本节中我们对$\beta\omega\setminus\omega$在$\beta\omega$和$\beta\omega\setminus\omega$中的非齐性有了一个概念；下一节中我们将引深这一研究；某种意义上讲是对非齐的"程度"与状态作进一步的研究．

§7 Rudin-Keisler序与P点

我们已经知道，在$\beta\omega$中两个点p，q点同胚(记作$p\sim q$)等价于：存在排列$f:\omega\to\omega$，使f的Stone延拓$\bar{f}$满足$\bar{f}(p)=q$．$\beta\omega$中的Rudin-Keisler序$\leqslant$的定义是：$q\leqslant p$当且仅且存在$f:\omega\to\omega$使$\bar{f}(p)=q$．

引理37 设$f:\omega\to\omega$满足$f(n)\neq n$，$n<\omega$，则必存在ω的子集A_0，A_1，A_2，使

$$\omega=A_0\cup A_1\cup A_2;$$
$$A_i\cap A_j=\phi,\ i,j=0,1,2,\ i\neq j;$$
$$A_i\cap f(A_i)=\phi,\ i=0,1,2.$$

这一引理的证明详见[2]，P.207，这里只阐述一下证明大意．递归地定义$f^m(n)$使

$$f^0(n)=n,\ f^{m+1}(n)=f(f^m(n));$$

再规定$n\sim m$当且仅当存在$i,j<\omega$，使$f^i(n)=f^j(m)$．这是一个等价关系因而确定了一个分类．对每一类r，按下述方法确定三个集A_{r0}，A_{r1}，A_{r2}满足定理要求的条件；然后令

$A_i=\bigcup\{A_{ri}:r$为等价关系$\sim$确定的类$\}$，$i=0,1,2$，则A_0，A_1，A_2即为所求．

A_{r0}，A_{r1}，A_{r2}之确定法大意如下：

情形1．存在$n_r \in r$，$n_r > 0$，使$f^n(n_r) = n_r$；即在映射f下，发生"转圈"的情形（注意，在每一类中这种"圈"只能有一个）．如图1所示，把图中所有标作⊙的点组成之集算作A_{r_0}；所有标作×的点组成之集算作A_{r_1}，而标作△的一个点组成之单点集算作A_{r_2}．

情形2．满足情形1的n_r不存在，即不发生转圈的情形．按图2所示方法分成A_{r_0}和A_{r_2}两类而令$A_{r_2} = \phi$．

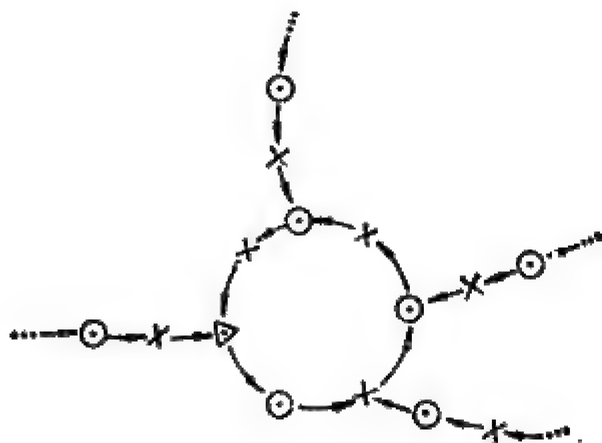


图 1

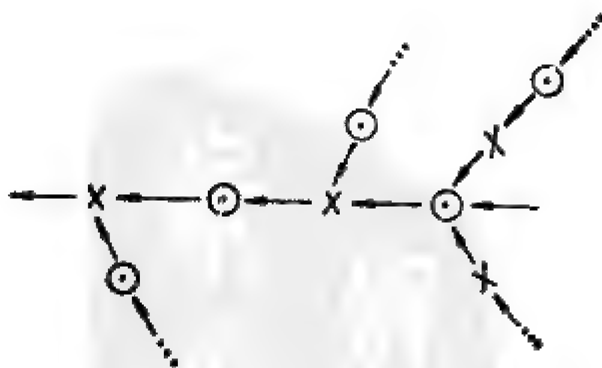


图 2

引理38　设$f: \omega \to \omega$，则下述命题成立．

（1）$\bar{f}(p)=\{A\subset\omega: f^{-1}(A)\in p\}$.

（2）$\bar{f}(p)=p$当且仅当$\{n\in\omega: f(n)=n\}\in p$.

（3）$\bar{f}(p)\sim p$当且仅当存在$A\in p$使$f\upharpoonright A$是1-1的.

证（1）若$f^{-1}(A)\in p$,则$p\in cl_{\beta\omega}f^{-1}(A)$（见引理17(3)），因此

$$\bar{f}(p)\in\bar{f}(cl_{\beta\omega}f^{-1}(A))\subset cl_{\beta\omega}\bar{f}(f^{-1}(A))\subset cl_{\beta\omega}A;$$

故$A\in\bar{f}(p)$。反过来，若$A\subset\omega$而$f^{-1}(A)\notin p$，则$\omega\setminus f^{-1}(A)=f^{-1}(\omega\setminus A)\in p$；因而$\omega\setminus A\in\bar{f}(p)$，即$A\notin\bar{f}(p)$。

（2）记$B=\{n<\omega: f(n)=n\}$。如果$B\in p$，则$p\in cl_{\beta\omega}B$，因此$\bar{f}(p)=p$。如果$B\notin p$，我们定义$g:\omega\to\omega$如下。$g\upharpoonright(\omega\setminus B)=f\upharpoonright(\omega\setminus B)$每对$n\in B$任意规定$g(n)$的数值．因为$p\in cl_{\beta\omega}(\omega\setminus B)$，而$g\upharpoonright(\omega\setminus B)=f\upharpoonright(\omega\setminus B)$，所以$\bar{g}(p)=\bar{f}(p)$。应用引理37于函数$g$；三个集$A_0$，$A_1$，$A_2$中必有一个属于$p$；不妨设$A_0\in p$．由于$A_0\cap g(A_0)=\phi$，据引理17(5)可得

$$cl_{\beta\omega}A_0\cap cl_{\beta\omega}g(A_0)=\phi.$$

因$A_0\in p$，故$p\in cl_{\beta\omega}A_0$。另一方面又有

$$p=\bar{f}(p)=\bar{g}(p)\in cl_{\beta\omega}g(A),$$

导至矛盾。

（3）若$\bar{f}(p)\sim p$，则存在1-1函数g使$\bar{g}(p)=\bar{f}(p)$；那么

$$\overline{(g\circ f)}(p)=\bar{g}(\bar{f}(p))=p.$$

置$A=\{n<\omega:(g\circ f)(n)=n\}$;由(2)知$A\in p$,$f$在$A$上自然是1-1。反过来，设存在$A\in p$，$f\upharpoonright A$是1-1函数．设法在$A$中找到子集$B$使$B\in p$而使$\omega\setminus B$，$\omega\setminus f(B)$皆为无限集；这总是能做到的。定义1-1函数$g\in{}^{\omega}\omega$使$g\upharpoonright B=f\upharpoonright B$而在$\omega\setminus B$中任意选定对应值使$g$保持1-1；由于$\omega\setminus B$，$\omega\setminus f(B)$都是无限集，这种选择也是做得到的。这样，由于$g\upharpoonright B=f\upharpoonright B$而$B\in p$可知$\bar{f}(p)=\bar{f}(p)\sim p$.

证毕

由以上引理便可断定Rudin-Keisler序是$\beta\omega$中的一个拟序

(quasi order) .

定理39 设p，q，$r\in\beta\omega$，则(1)$p\leqslant p$；(2)若$p\leqslant q, q\leqslant r$，则$p\leqslant r$；(3)若$p\leqslant q$，$q\leqslant p$，则$p\sim q$.

证 只需证明(3)。依条件，存在f，$g\in{}^{\omega}\omega$，使$\bar{f}(p)=q$，$\bar{g}(q)=p$。则$\overline{(g\circ f)}(p)=p$。记

$$A=\{n<\omega:(g\circ f)(n)=n\}.$$

据引理38(2)知$A\in p$。f在A上是1-1的；再应用引理38(3)可得$q=\bar{f}(p)\sim p$. 证毕

这一定理说明Rudin-Keisler序在$\beta\omega$中是一个拟序. 按点同胚这一等价关系$\sim$作商；在商空间$\beta\omega/\sim$中，如定义相应的Rudin-Keisler序如下：r_1，$r_2\in\beta\omega/\sim$，若对$p\in r_1$，$q\in r_2$有$p\leqslant q$，就称$r_1\leqslant r_2$，那么这个Rudin-Keisler序在$\beta\omega/\sim$中便是一个偏序了.

p，$q\in\beta\omega$，如果$p<q$（$p\leqslant q$，$p\not\sim q$），则意味着p和q是不能点同胚的，并且它们的邻域有着Rudin-Keisler序所刻划的某种联系；因而是非齐状态一种刻划.

首先研究$\beta\omega\setminus\omega$中的$P$点和关于Rudin-Keisler序的极小元之间的关系.

$p\in\beta\omega$称为**选超滤**(Selective ultrafilter)是指对每个$f\in{}^{\omega}\omega$，存在$A\in p$，使$f\restriction A$是1-1的或者$|f(A)|<\omega$.

ω的一个**划分**（partition）是指ω的子集之族$d=\{d_n:n<\omega\}$，它满足$\bigcup d=\omega$且$d_n\cap d_m=\phi$，$n\neq m$.

谈及极小元，自然应该在$\beta\omega/\sim$中讨论. $\beta\omega$中所有主超滤，即$n\in\omega$，都是点同胚的，在$\beta\omega/\sim$中成为同一元素；它显然是关于R-K序的最小元. 但我们对此不感兴趣；我们以后所说的$\leqslant$-极小是指$\omega^*\setminus\sim$（这里$\omega^*=\beta\omega\setminus\omega$）中的极小元. 为了避免符号烦多，我们仍在$\omega^*$中讨论；所谓$p\in\omega^*$是$\leqslant$-**极小元**是指不存在$q\in\omega^*$使$q<p$；即$q\leqslant p$且$q\not\sim p$.

定理40 设$p\in\omega^*$，下列陈述等价：

（1） p 是$\leqslant$-极小元；

（2） p 是选超滤；

（3）对ω的每个划分$d=\{d_n: n<\omega\}$，如果每个$d_n\notin p$，必存在$A\in p$使$|d_n\cap A|\leqslant 1$对每个$n<\omega$都成立。

证 (1)$\Rightarrow$(2)．设$f\in{}^{\omega}\omega$．因$\bar{f}(p)\leqslant p$．一种可能$\bar{f}(p)$是主超滤；此时必有$A\in p$使$|f(A)|<\omega$．另一种可能$\bar{f}(p)$是自由超滤．因p为$\leqslant$-极小，所以$p\leqslant\bar{f}(p)$，从而$\bar{f}(p)=p$．按引理24(3)，存在$A\in p$使$f\upharpoonright A$是1-1的．

(2)$\Rightarrow$(3)．定义$f\in{}^{\omega}\omega$使满足$f(d_n)=\{n\}$．如果存在$A_0\in p$使$|f(A_0)|<\omega$，则说明存在$m<\omega$使$A_0\subset\bigcup_{n<m}d_n$；这有限个$d_n$中必有一个属于$p$．如果存在$A$使$f\upharpoonright A$是1-1的，则$|d_n\cap A|\leqslant 1$，以上说明(3)成立．

(3)$\Rightarrow$(1)设$q\in\omega^*$，$q\leqslant p$，则存在$f\in{}^{\omega}\omega$使$\bar{f}(p)=q$．$\{f^{-1}(n): n\in f(\omega)\}$是$\omega$的一个划分．如果有某个$f^{-1}(n)\in p$，这将导至$q=\bar{f}(p)$为主超滤，与$q\in\omega^*$矛盾．如果每个$f^{-1}(n)\notin p$，则由(3)必存在$A\in p$使$|f^{-1}(n)\cap A|\leqslant 1$，也就是在$A$上$f$是1-1的，从而知$q\sim p$．这说明$p$是$\leqslant$-极小元．这一定理为Kunen给出．证毕

设A，B是ω的无限子集．如果$B\setminus A$为有限集；即除去有限个元外B几乎包含于A中，则记作$B\subset^* A$．

若$p\in\omega^*$，$A,B\in p$，则$A\subset^* B$的充要条件是$cl_{\beta\omega}A\subset cl_{\beta\omega}B$．因$cl_{\beta\omega}A(A\in p)$是$p$的开闭邻域；$\{cl_{\beta\omega}A: A\in p\}$是$p$的邻域基，因此有下述引理．

引理41 p是ω^*中的P点的充要条件是对任意可数个$A_n\in p$ $(n<\omega)$，必存在$A\in p$，使对一切$n<\omega$，有$A\subset^* A_n$．

定理42 p是ω^*中的P点的充要条件是对ω的每个划分$d=\{d_n: n<\omega\}$，如果$d_n\notin p$对一切$n<\omega$成立，则必存在$A\in p$，使

$$|A\cap d_n|<\omega,\ n<\omega.$$

证 设p是ω^*中的P点；$d=\{d_n: n<\omega\}$是ω的一个划分且

$d_n \notin p$, $n<\omega$. 则对每个$n<\omega$

$$A_n=\bigcup\{d_i: i\geqslant n\}\in p.$$

由引理41，存在$A\in p$，使$A\subset^* A_n$，$n<\omega$；即$|A\setminus A_n|<\omega$，$n<\omega$. 于是

$$\begin{aligned}A\cap d_n&=A\cap(A_n\setminus A_{n+1})\\&=A\cap A_n\setminus A\cap A_{n+1}\\&\subset A\setminus A_{n+1},\end{aligned}$$

可见$|A\cap d_n|<\omega$对一切$n<\omega$成立。

反过来，任取可数个$A_n\in p$，不妨设

$$A_{n+1}\subset A_n,\ n<\omega$$

记$d_n=A_n\setminus A_{n+1}$，则$\{d_n: n<\omega\}\cup\{\omega\setminus A_0\}$便是$\omega$的一个分划；显然每个$d_n\notin p$，且$\omega\setminus A_0\notin p$. 由条件存在$A\in p$使$|A\cap d_n|<\omega$，$n<\omega$且$|A\cap(\omega\setminus A_0)|<\omega$. 不妨设$A\subset A_0$，则

$$\begin{aligned}A\setminus A_n=A\cap A_0\setminus A\cap A_n&=A\cap(A_0\setminus A_n)\\&=A\cap(d_0\cup d_1\cup\cdots\cup d_{n-1})\end{aligned}$$

可见$|A\setminus A_n|<\omega$；即$A\subset^* A_n$，$n<\omega$. 这说明p是P点. 证毕

这个定理告诉我们，$\leqslant$-极小元必是P点.

定理43 若p是ω^*中的P点，$q\in\omega^*$且$p\leqslant q$，则q也是P点.

证 由于$p\leqslant q$，知存在$f\in{}^{\omega}\omega$使$\bar f(p)=q$. 设$\{A_n: n<\omega\}\subset q$，则$\{f^{-1}(A_n): n<\omega\}\subset p$. 因$p$是$P$点，知存在$H\in p$使$H\subset^* f^{-1}(A_n)$. 由此可得$f(H)\subset^* A_n$，$n<\omega$. 又因$f(H)\in q$，据引理41知$q$也是$P$点. 证毕

这个定理告诉我们，如果非P点和P点可以比较，则P点必是较小者. 自然会问非P点与P点间，P点与P点间是否总能比较呢？回答是否定的；$\leqslant$不是全序. 那么每个P点或每个$\leqslant$-极小元是否总存在与它可比较的P点或非P点呢？本节的余下篇幅将回答这个问题.

上一节曾经提到，ω^*中P点的存在性是独立于ZFC的结果.

Shelah的不存在P点与ZFC相容的证明由于篇幅过长，不能在此阐述。而Booth关于在MA下P点存在的结果由第四章§3中之Booth定理和本章引理41便可直接得知。

定理44（MA）ω^*中存在P点。

设$p\in\omega^*$，$D\subset\omega$。如果存在$A\in p$使对任意的$m<\omega$有$|\{n\in A: |f^{-1}(n)\cap D|\leqslant m\}|<\omega$，则称$D$是能射入$p$的塔，简称**$p$塔**。又若$p$塔$D$还满足$\sup\{|f^{-1}(n)\setminus D|: n\in A\}<\omega$，则称$D$是能射入$D$的满塔，简称**$p$满塔**。令$\mathscr{D}_p$为一切$p$满塔组成之集。容易验证$\mathscr{D}$关于有限交是封闭的。

在下面的讨论中，固定一个$f\in{}^\omega\omega$，它满足$|f^{-1}(n)|=n$，$n<\omega$。

引理45 设p为ω^*中之P点。$\mathscr{D}_p\cup\{F\}$有强有限交性质之充要条件是F为p塔。

证 若F不是p塔，则对每个$A\in p$，存在$m_A<\omega$使

$$|\{n\in A: |f^{-1}(n)\cap F|\leqslant m_A\}|=\omega. \qquad (1)$$

如果存在$m<\omega$，对一切$A\in p$，当取$m_A=m$对上式都成立，那么对每个$A\in p$，必有

$$A_0=\{n\in A: |f^{-1}(n)\cap F|\leqslant m\}\in p; \qquad (2)$$

否则$A_1=A\setminus A_0\in p$，将有

$$\{n\in A_1: |f^{-1}(n)\cap F|\leqslant m\}=\phi$$

对于这个A_1，取$m=m_{A_1}$时，（1）式将不成立了。由于（2）式成立

$$C=\bigcup\{f^{-1}(n)\setminus F: n\in A_0\}\in\mathscr{D}_p$$

而$C\cap F=\phi$，导至矛盾。

如果上述的m不存在，则必可找到一列递增的自然数m_i，$i<\omega$，和可数个$A_i\in p$，$i<\omega$，使

$$\tilde{A}_i=\{n\in A_i: |f^{-1}(n)\cap F|>m_i\}\in p;$$

否则将与上述m不存在的前提发生矛盾。由于p是P点，故必存

在$A\in p$，使

$$A\subset^* A_i,\ A\subset^* \widetilde{A}_i,\ i<\omega.$$

此时对任取的$m<\omega$，由于存在$m_i\geqslant m$，故

$$\{n\in A:|f^{-1}(n)\cap F|\leqslant m\}\subset\{n\in A:|f^{-1}(n)\cap F|\leqslant m_i\}$$
$$\subset A\setminus\widetilde{A}_i$$

由此可知$|\{n\in A:|f^{-1}(n)\cap F|\leqslant m\}|<\omega$.这说明$F$是一个$p$塔，又导至矛盾.

以上证明了必要性．现设F是p塔，$C\in\mathscr{D}_p$；即C为p满塔．据满塔定义，存在$m<\omega$和$A_0\in p$使

$$\sup\{|f^{-1}(n)\setminus C|:n\in A_0\}=m$$

F是p塔，所以必存在$A_1\in p$使

$$|\{n\in A_1:|f^{-1}(n)\cap F|\leqslant m\}|<\omega$$

故必存在$n\in A_0\cap A_1$，$n>m$，使$|f^{-1}(n)\cap F|>m$．但$|f^{-1}(n)\setminus C|\leqslant m$，又有$|f^{-1}(n)|=n$，所以

$$F\cap C\cap f^{-1}(n)\neq\phi, \qquad (3)$$

如若不然，$f^{-1}(n)\cap F\subset f^{-1}(n)\setminus C$ 则 $|f^{-1}(n)\cap F|\leqslant|f^{-1}(n)\setminus C|$导至矛盾．由于满足(3)式的$n$有无限个，这说明$\mathscr{D}\cup\{F\}$有强有限交性质．

证毕

引理46 设$\widetilde{\mathscr{D}}_p=\mathscr{D}_p\cup\{F_n:n<\omega\}$ 有强有限交性质；$d=\{d_n:n<\omega\}$ 是ω的一个划分；p为P点．则必存在p塔F使$\{F\}\cup\widetilde{\mathscr{D}}_p$仍有强有限交性质，并且或者存在$m<\omega$，使

$$F=\bigcup_{n\leqslant m}d_n,$$

或者对每个$n<\omega$，都有

$$|F\cap d_n|<\omega.$$

证 如果存在$m<\omega$，使$\widetilde{\mathscr{D}}_p\cup\{\bigcup\limits_{n\leqslant m}d_n\}$有强有限交性质，则令$F=\bigcup\limits_{n\leqslant m}d_n$即可．如果这样的$m$不存在，则对每个$n<\omega$，

$$D_n=\bigcup\{d_i:i\geqslant n\}$$

必与$\widetilde{\mathscr{D}}$有强有限交性质，否则存在C_1，$C_2\in\widetilde{\mathscr{D}}_p$使$|C_1\cap D_n|<$

ω，$|C_2\cap(\omega\setminus D_n)|<\omega$，那么

$$C_1\cap C_2=(C_1\cap C_2\cap D_n)\cup(C_1\cap C_2\cap(\omega\setminus D_n))$$
$$\subset(C_1\cap D_n)\cup(C_2\cap(\omega\setminus D_n))$$

因而也有$|C_1\cap C_2|<\omega$，导至矛盾．记

$$B_n=D_n\cap F_0\cap F_1\cap\cdots\cap F_n,\quad n<\omega$$

由于B_n与$\mathscr{D}_p$有有限交性质，故由引理45，B_n是一个p塔，即存在$A_n\in p$，使

$$B_n=\cup\{f^{-1}(i)\cap B_n:i\in A_n\}.$$

因p是P点，故存在$A_0\in p$，使

$$A_0\subset^* A_n,\quad n<\omega;$$

又由于B_n是p塔，必存在$i_n<\omega$，当$i\geqslant i_n$且$i\in A_n$时，有

$$|f^{-1}(i)\cap B_n|\geqslant n.$$

不妨设$0=i_0<i_1<\cdots<i_n<\cdots$．则

$$\{[i_n,\ i_{n+1}):\ n<\omega\}$$

是ω的一个划分，其中$[i_n,\ i_{n+1})=\{k<\omega:i_n\leqslant k<i_{n+1}\}$，据定理42，存在$A_1\in p$，使

$$|A_1\cap[i_n,\ i_{n+1})|<\omega,\quad n<\omega$$

令$A=A_0\cap A_1$，$F=\bigcup\limits_{n<\omega}\cup\{f^{-1}(i)\cap B_n:i\in A\cap[i_n,\ i_{n+1})\}$则$F$显然是一个$p$-塔．注意到$B_{n+1}\subset B_n$，$n<\omega$，可知$F$与每个$B_n$之交非空．所以$\{F\}\cup\widetilde{\mathscr{D}}_p$有强有限交性质．再注意到$D_n$也是$p$塔，故存在$\widetilde{A}_n\in p$

$$D_n=\cup\{f^{-1}(i)\cap D_n:i\in\widetilde{A}_n\}$$

因$B_n\subset D_n$，可认为$A_n\subset\widetilde{A}_n$．这样

$$F\cap d_n=F\cap(D_n\setminus D_{n+1})\subset F\setminus D_{n+1}$$
$$\subset\cup\{f^{-1}(i):i\in(A\setminus\widetilde{A}_{n+1})\cup[i_0,\ i_{n+1})\}$$
$$\subset\cup\{f^{-1}(i):i\in(A\setminus A_{n+1})\cup[i_0,\ i_{n+1})\}.$$

由于$|(A\setminus A_{n+1})\cup[i_0,\ i_{n+1})|<\omega$，而且$|f^{-1}(i)|<\omega$，$i<\omega$，所以上式中最后一项为有限集；从而知$|F\cap d_n|<\omega$对每个$n<\omega$都

成立。 证毕

定理47 (CH) 设p是ω^*中的P点，则必存在P点q使$p<q$。

证 在CH下，ω的划分共有ω_1个。记这ω_1个划分为

$$\{d_\alpha:\alpha<\omega_1\},\ d_\alpha=\{d_{\alpha n}:n<\omega\}$$

令$\mathscr{D}_0=\mathscr{D}_p$。再归纳地假设对于$\eta<\omega_1$一切$\alpha<\eta$都已确定了$\mathscr{D}_\alpha=\mathscr{D}_0\cup\{F_\nu:\nu<\alpha\}$满足：

（1）$\mathscr{D}_\alpha$有强有限交性质；

（2）每个F_ν或者等于有限个$d_{\nu n}$之并，或者对一切$n<\omega$，$|F_\nu\cap d_{\nu n}|<\omega$。

如果η是极限序数，则令

$$\mathscr{D}_\eta=\cup\{\mathscr{D}_\alpha:\alpha<\eta\}$$

容易看到$\mathscr{D}_\eta$也满足（1），（2）两条件。如果$\eta=\alpha+1$，则因$\alpha<\omega_1$，据引理45，存在p塔F_η，当令$\mathscr{D}_\eta=\mathscr{D}_\alpha\cup\{F_\eta\}$时，$\mathscr{D}_\eta$也满足（1），（2）两条件，这样便可认为已确定了集族

$$\mathscr{D}_p\cup\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\},$$

它具有强有限交性质，而每个F_α满足条件（2）。既然具有强有限交性质，所以存在$q\in\omega^*$，使

$$\mathscr{D}_p\cup\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset q.$$

又由于每个F_α都满足条件（2），据定理42知q必为P点。最后一点，因q中的元与$\mathscr{D}_p$有强有限交性质，据引理45 q为p塔；即对每个$B\in q$，$f^{-1}(B)\in p$，故$\bar{f}(q)=p$；也就是

$$p\leqslant q$$

但$p\sim q$是不可能的，因若$p\sim q$，据引理38（3）必存在$B\in q$使f在B上是1-1的。记$A=f(B)$，则$\{f^{-1}(n)\setminus B:n\in A\}\in\mathscr{D}_p$而$B\cap\{f^{-1}(n)\setminus B:n\in A\}=\phi$，这与$\mathscr{D}_p\subset q$矛盾。 证毕

我们在〔15〕中对这一命题作了如下部分地推广。

定理48 (CH) 设p是$\leqslant$一极小元，则必存在P点q使$p<$

q，且不存在$r\in\omega^*$使$p<r<q$。

定理47是Rudin在〔16〕中给出；但这里的引理及它们的证明都沿用了〔15〕中的术语与方法。定理48也说明Rudin-Keisler序并非稠密。

如果不限于P点范围，则有下述绝对的定向性结果。

定理49 设$S\subset\omega^*$，$|S|\leqslant 2^\omega$，则必存在$q\in\omega^*$使对每个$p\in S$，皆有$p<q$。

这个定理的证明可见〔17〕，独立地也为Katětov所证明（〔18〕）。但这种定向性在P点范围内是不成立；Blass在〔19〕中证明了以下命题。

定理50（MA） 任何两个$\leqslant$-极小元不存在P点作为其共同上界。

以上研究了Rudin-Keisler序及P点在这个序中的位置。但P点的存在是独立于ZFC的；而且在研究Rudin-Keisler序的特性时，也只是讨论了可比较的某些情形。ω^*中是否存在不可比较的点呢？下面我们给出Kunen的一个著名的绝对性结果作为本章的结束（〔20〕）。

设$\mathscr{F}\subset[\omega]^\omega$是一滤子。$\omega$中的不交子集对组成之族$\{\langle A_i^0, A_i^1\rangle: i\in I\}$若满足以下条件，则称该族是关于滤子$\mathscr{F}$的**独立族**（independent family）：对一切$\sigma\in[I]^{<\omega}$，$f\in{}^\sigma 2$和$F\in\mathscr{F}$，集

$$F\cap(\cap\{A_i^{f(i)}: i\in\sigma\})$$

必为无限集。

引理51 存在关于滤子$\{F\subset\omega: \omega\setminus F$为有限集$\}$的独立族$\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle: \alpha<2^\omega\}$。

定理35（b）中的集对族显然满足本引理之要求。

若$A\subset\mathscr{P}(\omega)$，我们用$\langle A\rangle$表示由$A$产生的滤子；即$A\subset\langle A\rangle$，$\langle A\rangle$是$\omega$上的滤子。如果这样的滤子存在，则必是唯一的

引理52 设$\mathscr{F}$，$\mathscr{G}\subset\mathscr{P}(\omega)$是滤子；再设$\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle: \alpha\in I\}$是关于$\mathscr{F}$也是关于$\mathscr{G}$的独立族，则对每个$f\in{}^\omega\omega$，存在有限集$J\subset I$和一无限集$A\subset\omega$，使$\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle: \alpha\in I\setminus J\}$是关于$\langle\mathscr{F}\cup\{A\}\rangle$也是关于$\langle\mathscr{G}\cup\{\omega\setminus f^{-1}(A)\}\rangle$的独立族。

证 任意固定一点$a\in I$。

情形1 $\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle: \alpha\in I\setminus\{a\}\}$关于$\langle\mathscr{G}\cup\{\omega\setminus f^{-1}(A_a^0)\}\rangle$是独立族。在此情形下，置$A=A_a^0$，$J=\{a\}$。容易验证$A$和$J$满足要求。

情形2 情形1不成立。则必存在一个有限集$K\subset I/\{a\}$和一个函数$\tilde{f}\in{}^K2$以及$H\in\mathscr{G}$使

$$\left|\bigcap_{i\in K} A_i^{\tilde{f}(i)}\cap H\cap(\omega\setminus f^{-1}(A_a^0))\right|<\omega \qquad (1)$$

今置$A=\omega\setminus A_a^0$，$J=K\cup\{a\}$。显然，$\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle: \alpha\in I\setminus J\}$是关于$\langle\mathscr{F}\cup\{A\}\rangle$的独立族。

设$L\subset I\setminus J$是有限集。取$g\in{}^L2$，任取$H_0\in G$，则

$$\bigcap_{\alpha\in L} A_\alpha^{g(\alpha)}\cap H_0\cap(\omega\setminus f^{-1}(A))=\bigcap_{\alpha\in L} A_\alpha^{g(\alpha)}\cap H_0\cap f^{-1}(A_a^0)\supset$$

$$\bigcap_{\alpha\in L} A_\alpha^{g(\alpha)}\cap\left(\bigcap_{i\in K} A_i^{\tilde{f}(i)}\right)\cap(H\cap H_0)\cap f^{-1}(A_a^0)$$

由（1）式可知上式中各交集皆为无限集，这说明$\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle: \alpha\in I\setminus J\}$关于$\langle\mathscr{G}\cup\{\omega\setminus f^{-1}(A)\}\rangle$也是独立族。 证毕

定理53 ω^*中存在点p，q使$p\not\leq q$且$q\not\leq p$。

证 据引理51存在$\{\langle A_\alpha^0, A_\alpha^1\rangle: \alpha\in{}^\omega2\}$关于$\{F\subset\omega: \omega\setminus F$为有限集$\}$为独立族。把${}^\omega\omega$排成良序：${}^\omega\omega=\{f_\alpha: 1\leq\alpha<2^\omega\}$。我们用递归方法对每个$\alpha<2^\omega$，构作出$\mathscr{F}_\alpha$，$\mathscr{G}_\alpha$和$K_\alpha\subset 2^\omega$，使满足：

（1）$\mathscr{F}_\alpha$，$\mathscr{G}_\alpha$是ω上的滤子，且

$$\{\langle A_\xi^0, A_\xi^1\rangle: \xi\in K_\alpha\}$$

是关于$\mathscr{F}_\alpha$，$\mathscr{G}_\alpha$是独立族；

（2）$K_0=2^\omega$，$\mathscr{F}_0=\mathscr{G}_0=\{F\subset\omega: \omega\setminus F$为有限集$\}$；

（3）若$\beta<\alpha$则$\mathscr{F}_\alpha\subset\mathscr{F}_\beta$，$\mathscr{G}_\beta\subset\mathscr{G}_\alpha$而$K_\alpha\subset K_\beta$；

（4）对每个$\alpha<2^\omega$，$|2^\omega\setminus K_\alpha|\leqslant|\alpha|\cdot\omega$；

（5）对每个$\alpha\geqslant 1$，存在集A，$B\subset\omega$，使

$$\{A,\ \omega\setminus f_\alpha^{-1}(B)\}\subset\mathscr{F}_\alpha;$$

$$\{B,\ \omega\setminus f_\alpha^{-1}(A)\}\subset\mathscr{G}_\alpha.$$

我们递归过程留给读者；事实上由引理51，52，递归过程之可行已很明显了。

现设递归过程已经完成，对每个$\alpha<2^\omega$都已确定了$\mathscr{F}_\alpha$，$\mathscr{G}_\alpha$和K_α且满足（1）—（5），令p，$q\in\omega^*$满足

$$\bigcup_{\alpha<2^\omega}\mathscr{F}_\alpha\subset p,\quad \bigcup_{\alpha<2^\omega}\mathscr{G}\subset q.$$

则据（5）便可知$p\not\leq q$，$q\not\leq p$。　　　　证毕

这个定理的证法说明，如果希望不用附加的集论假设去研究$\beta\omega$，那么组合论证方法是很重要的。

Kunen在〔20〕中的结果比定理53还要强。他证明了ω^*中存在2^ω个不能比较的点。Shelah和Rudin在1978年又证明了ω^*存在2^{2^ω}个不能比较的点（〔21〕）。但是稍稍把问题改变一下：给定$p\in\omega^*$，问是否存在$q\in\omega^*$使p，q不能比较？却仍然是一个谜。

Rudin-Keisler序首先是由Katětov1961年提出的（〔22〕）。独立地也为Rudin（〔23〕）和Keisler（〔24〕）提出。

参考文献

〔1〕R.C.Walker, The Stone-Čech Compactification, Springer-Verlag, Berlin, Heidelbery, New York, 1974.

〔2〕W. W. Comfort and S. Negrepontis, The theory of Ultrafilter, Springer-Verlag, 1974.

〔3〕J. van Mill, An introduction to $\beta\omega$, Handbook of Set-theoretic Topology, Edited by K. Kunen

and J. Vaughan, North-Holland, 1984.

〔4〕 J. L. Kelley, General Topology, New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1955.

〔5〕 R. Engelking, General Topology, Warszawa, 1977.

〔6〕 D. Booth, Countably indexed ultrafilters, Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, Wis. 1969.

〔7〕 C. F. Mills, An easier proof of the shelah P-point independence theorem, 1978, Trans. Amer. Math. Soc.

〔8〕 I. I. Parovičenko, A universal bicompact of weight $\aleph$, Soviet Math. Dokl. 4, 1963, 592-595.

〔9〕 E. K. van Douwen, J. van Mill, Parovičenko Characterization of $\beta\omega\setminus\omega$ implies CH, proc. Amer. Math. Soc. 72, 1978, 539-541.

〔10〕 W. W. Comfort, N. Hindman and S. Negrepontis, F-spaces and their products with P-spaces, Pacific J. Math. 28, 1969, 489-502.

〔11〕 K. Kunen. Set Theory. North- Holland -Amsterdam, 1980.

〔12〕 R. G. Woods, Characterizations of some C*-embedded subsets of βN, Pacific J. Math.65, 1976, 573-579.

〔13〕 W. Sierpiński, Sur une décomposition d'ensembles, Monatsh. Math. Phys. 35, 1928, 239-242.

〔14〕 F. Hausdorff, Summen von $\aleph_1$ mengen, Fund. Math. 26, 1936, 241-255.

〔15〕 杨守廉，祁金城，Rudin-Keisler序相关于$\beta\omega\setminus\omega$中极小元的某些性质，数学学报，4，1984，512-519.

〔16〕 M. E. Rudin, Partial orders on the types in βN, Trans. Amer. Math. Soc., 155, 2, 1971, 353-362.

〔17〕 W. W. Comfort, S. Negrepontis, On families of large oscillation, Fund. Math. 75, 1972, №.3, 275-290.

〔18〕 M. Katětov, On descriptive Classification of function, General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra, Ⅲ (Proc. Third Prague Topological Symposium, 1971) Academic Prague, 1972, 235-242.

〔19〕 A. Blass, The Rudin-Keisler ordering of P-points, Tran. Amer. Math. Soc. 179, 1973, 145-166.

〔20〕 K. Kunen, Ultrafilters and independent sets, Trans. Amer. Math. Soc. 172, 1987, 299-306.

〔21〕 S. Shelah and M. E. Rudin, Unordered types of Ultrafilters, Top. Proc. 3, 1978, 199-204.

〔22〕 M. Katětov, Chracters and types of points sets, Fund. Math. 50, 1961, 369-380 (Russian).

〔23〕 M. E. Rudin, Types of ultrafilters, Topology Seminar Wisconsin, 1965, Edited by R. H. Bing aud R. J. Bean.

〔24〕 H. J. Keisler, Mimeographed lecture notes, Uuiv. of California, Los, Angeles, 1967.

第六章　拓扑空间Borel测度的Radon性质

60年代前后，拓扑空间和测度的研究开始交汇，首篇系统研究拓扑空间中测度的文章是Varadarajan的《Measure on topological spaces》(1965，〔1〕)。本章将选择拓扑空间 Borel 测度研究中的一个问题：Borel测度完备和Radon性质的关系进行讨论，一个拓扑空间如果每个有限的Borel测度都具有Radon性质，就称为Radou空间。我们知道Radon空间一定是Borel 测 度 完 备 的空间，但是反过来就不对了，什么条件下反过来也能成立呢？人们很早知道局部紧空间如果是Borel测度完备的则必是Radon空间。能不能再减弱这些条件呢？在相容的集论假设下，可以得到许多精采的回答。

本文将尽可能阐明Borel测度的基本概念和 必 要 的 予 备 知识，尽可能自我满足，本章大部分内容都可在〔2〕中找到。

§1　测度和Borel测度的预备知识

设X是一非空集，$\mathscr{P}(X)$表示X的一切子 集 组 成 之 族．设$\mathscr{U}\subset\mathscr{P}(X)$是一非空子集．$\mathscr{U}$称为$X$上的代数 (algebra)是指它对有限并 (finite unions) 和取补 (complements) 的运算封闭，也就是如果E_1，E_2，……，$E_n\in\mathscr{U}$，则$\cup\{E_i:i=1,\cdots,n\}\in\mathscr{U}$，如果$E\in\mathscr{U}$，则$X\setminus E\in\mathscr{U}$．$X$上的$\sigma$-代数 ($\sigma$-algebra)是指$X$上对可数并封闭的代数．

很明显，设$\mathscr{H}$是由X上某些σ-代数组成 之 族．则$\cap\mathscr{H}$仍然是一个σ-代数．因此，如果$\mathscr{C}$是$\mathscr{P}(X)$的任一子集，那么存在

一个包含$\mathscr{E}$的最小的σ-代数$\mathscr{U}(\mathscr{E})$，我们称$\mathscr{U}(\mathscr{E})$是由$\mathscr{E}$产生的σ-代数。

定义1 函数μ：$\mathscr{U}\to[0, +\infty]$若满足以下条件就称为$\mathscr{U}$上的一个测度（measure），其中$\mathscr{U}$是非空集$X$上的$\sigma$-代数：

（1）$\mu(\phi)=0$，（2）如果$\{E_i:i=1, 2, \cdots\}\subset\mathscr{U}$是两两不交的可数子族，则$\mu(\cup\{E_i:i=1, 2, \cdots\})=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$，这一性质称为$\sigma$-可加性。

$\mathscr{U}$上的测度也称作$(X, \mathscr{U})$上的测度，在$\mathscr{U}$为已知的情况下，也简称为X上的测度，如果μ是$(X, \mathscr{U})$上的测度，就称$(X, \mathscr{U}, \mu)$为测度空间。

设μ是$(X, \mathscr{U})$上的测度。如果$\mu(X)=0$，则称μ是平凡的（trivial）。如果$\mu(X)<+\infty$，则称μ是有限的。如果$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$，$X_n\in\mu$，而$\mu(X_n)<+\infty$，$n=1, 2, \cdots$，则称$\mu$是$\sigma$-有限的。

定义2 非空集X的幂集$\mathscr{P}(X)$上的函数φ：$\mathscr{P}(X)\to[0, +\infty]$若满足以下条件，就称为$X$上的外测度（outer measure），

（1）$\varphi(\phi)=0$，

（2）$\varphi(A)\leqslant\varphi(B)$，$A\subset B\subset X$，

（3）$\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$，$A_n\subset X$，$n=1, 2, \cdots$，

定义3 设φ是X上的一个外测度，集$E\subset X$若满足下述条件就称E是φ-可测的。（φ-measurable）：对任一$M\subset X$，有

$$\varphi(M)=\varphi(M\cap E)+\varphi(M\setminus E)$$

定理1 设φ是集X上的外测度，则下述命题成立：

（1）所有φ-可测的集合组成之族是X中的σ-代数。记作$\mathscr{U}$。

（2）若$E_n\in\mathscr{U}$，$n=1, 2, \cdots$，是两两不交的，$A\subset X$，则

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap E_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A\cap E_n).$$

由此可知$\varphi\restriction\mathscr{U}$是$\mathscr{U}$上的一个测度。

（3）若$A\subset X$且$\varphi(A)=0$，则$A\in\mathscr{U}$。

定理2 设（X，$\mathscr{U}$，μ）是一测度空间．若对每个$A\subset X$，令

$$\mu^*(A)=\inf\{\mu(B):A\subset B,\ B\in\mathscr{U}\}$$

则μ^*是X上的外测度，且有下述命题成立：

（1）所有μ^*-可测集组成的σ-代数$\mathscr{U}^*$包含$\mathscr{U}$，且有$\mu^*\restriction\mathscr{U}=\mu$。

（2）子集$E\subset X$属于$\mathscr{U}^*$之充要条件是$E\cap B\in\mathscr{U}^*$对每个满足$\mu(B)<+\infty$的$B(\in\mathscr{U})$成立。

（3）设$E\subset X$，$\mu^*(E)<+\infty$．$E\in\mathscr{U}^*$之充要条件是存在$B\in\mathscr{U}$使$\mu^*[(E\setminus B)\cup(B\setminus E)]=0$。

以上两个定理的证明可在任何一本实分析或测度论的基本教材例如[3]，[4]中找到，不在这里赘述。

本章中讨论的空间都系Hausdorff拓扑空间；也就是空间中任意两个点x,y，必存在不交的两个开集U_x,U_y使$x\in U_x,y\in U_y$。

空间X的开集族、闭集族和紧集族分别用$\mathscr{G}(X)$、$\mathscr{F}(X)$和$\mathscr{K}(X)$来表示．由开集族$\mathscr{G}(X)$产生的σ-代数就称为X上的Borel σ-代数，记作$\mathscr{B}(X)$，$\mathscr{B}(X)$中的元素就称为Borel集，下文中在不致引起混乱的前提下，我们用$\mathscr{G}$、$\mathscr{F}$、$\mathscr{K}$和$\mathscr{B}$分别简记$\mathscr{G}(X)$、$\mathscr{F}(X)$、$\mathscr{K}(X)$和$\mathscr{B}(X)$。

如果X是一空间而$A\subset X$，用$\overline{A},A^\circ$分别表示表示A的闭包（closure）和内部（interior）．点$x\in X$（$A\subset X$）的邻域系指X的子集U，它满足$x\in U^\circ$（$A\subset U^\circ$），U不一定是开集。

定义4 空间X上的Borel测度μ是指X上的Borel σ-代数$\mathscr{B}$上的一个局部有限测度，即对每个$x\in X$，存在邻域$U\in\mathscr{B}$，使

$$\mu(U)<+\infty.$$

设$A\subset X$，令

$$\mu^*(A)=\inf\{\mu(G):A\subset G,\ G\in\mathscr{G}\},$$
$$\mu_*(A)=\sup\{\mu(F):F\subset A,\ F\in\mathscr{F}\}.$$

定义5 设μ是空间X上的Borel测度，$B\in\mathscr{B}$。如果B满足$\mu(B)=\mu^*(B)$，则称B是μ-外正则（μ-outer regular）的；如果$\mu(B)=\mu_*(B)$，则称B是μ-内正则（μ-inner regular）的；如果$\mu(B)=\sup\{\mu(K):K\subset B,\ K\in\mathscr{K}\}$，则称$B$是$\mu$-Radon的。假如$\mathscr{B}$中每个元素$B$都是$\mu$-外正则（$\mu$-内正则或$\mu$-Radon），就称$\mu$是外正则（内正则或Radon）的；又若$\mu$既是外正则又是内正则，就称$\mu$是正则的，若$\mathscr{B}$中每个元素都是$\mu$-Radon的，则称$\mu$是Radon的。

对于X上的有限Borel测度，如果它是内正则或是外正则，则它必是正则的。事实上，如果μ内正则；即对每个$A\in\mathscr{B}$，有$\mu(A)=\mu_*(A)$。任取$B\in\mathscr{B}$，令$A=X\setminus B$，则

$$\begin{aligned}\mu^*(B)&=\inf\{\mu(G):\ B\subset G,\ G\in\mathscr{G}\}\\&=\inf\{\mu(X)\setminus\mu(X\setminus G):\ X\setminus G\subset A,\ G\in\mathscr{G}\}\\&=\mu(X)-\sup\{\mu(F):\ F\subset A,\ F\in\mathscr{F}\}\\&=\mu(X)-\mu_*(A)\\&=\mu(X)-\mu(A)\\&=\mu(B)\end{aligned}$$

同样，由外正则也可推知内正则。

又由于讨论的空间都是Hausdorff的，因此每个紧集都是闭集。由此可知：

$$\sup\{\mu(K):\ K\subset A,\ K\in\mathscr{K}\}\leqslant\sup\{\mu(F):\ F\subset A,\ F\in\mathscr{F}\}\leqslant\mu(A),$$

从而可断定若μ是Radon的则μ也是内正则的。但上述这种关系的反向蕴涵却是不成立的。这里先举一个非有限Borel测度内正则

而非外正则的例子。

例1 设Y是不可数的离散空间，$X=Y\times[0,1]$。显然X是局部紧(locally compact)且是可度量空间（metrizable space）。对于每个$B\in\mathscr{B}(X)$，令

$$\mu(B)=\sum_{y\in Y}\lambda(\{t\in[0,1]:(y,t)\in B\})$$

其中λ表示实数集R上的Lebesgue测度；无限和的意义如下：若$f: Y\to[0,+\infty)$，则定义

$$\sum_{y\in Y}f(y)=\sup\{\sum_{y\in F}f(y):F\subset Y,\ F\text{为有限集}\}.$$

据定义可判定μ不是有限的。读者容易验证μ是内正则的，但是闭集$Y\times\{0\}$恰不是μ-外正则的，事实上$\mu(Y\times\{0\})=0$，而$\inf\{\mu(G): G\supset Y\times\{0\}, G\text{在}Y\text{中为开集}\}=+\infty$，因为对任何包含$Y\times\{0\}$的开集$G$，皆有$\mu(G)=+\infty$。

非空集族$\mathscr{A}$称为向上定向（directed upwards）是指$\mathscr{A}$满足：对任意的$A, B\in\mathscr{A}$，存在$C\in\mathscr{A}$使$A\cup B\subset C$；$\mathscr{A}$称为向下定向（directed downwards）是指$\mathscr{A}$满足：对任意$A, B\in\mathscr{A}$，存在$C\in\mathscr{A}$使$C\subset A\cap B$。如果$A=\cup\mathscr{A}$，而$\mathscr{A}$是向上定向的，就记作$\mathscr{A}\nearrow A$；如果$A=\cap\mathscr{A}$，而$\mathscr{A}$是向下定向的，就记作$\mathscr{A}\searrow A$。

定义6 空间X中的Borel测度μ如果满足

$$\sup\{\mu(G):G\in\mathscr{G}_0\}=\mu(X),$$

其中$\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}$是满足$\mathscr{G}_0\nearrow X$的任一子族，则称$\mu$是弱$\tau$-可加的。如果满足

$$\sup\{\mu(G):G\in\mathscr{G}_0\}=\mu(G_0),$$

其中$\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}$是满足$\mathscr{G}_0\nearrow\mathscr{G}_0$的任一子族，则称$\mu$是$\tau$-可加的。

据定义立即可推知

命题 设X上的Borel测度μ是有限的。则

（1）μ是弱τ-可加之充要条件是

$$\inf\{\mu(F): F\in\mathscr{F}_0\}=0,$$

其中$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$是满足$\mathscr{F}_0\searrow\phi$的任一子族。

（2）μ是τ-可加之充要条件是

$$\inf\{\mu(F): F\in\mathscr{F}_0\}=\mu(F_0)$$

其中$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$是满足$\mathscr{F}_0\searrow F_0$的任一子族.

对于非有限的Borel测度，命题3的结论不真. 下面是一反例.

例2 WC测度（Weighted counting measure）. 设X是一空间，$f: X\to[0, +\infty)$，对每个$B\in\mathscr{B}(X)$，令

$$\mu(B)=\sum_{x\in B}f(x),$$

可以验证这是$\mathscr{B}$上的一个测度. 我们称这个测度为WC测度，f称为重子（Weight）. 如果X是离散空间（discrete space），则μ是τ-可加、外正则且是Radon测度. 下面验证τ-可加，余下的留给读者，设$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$是满足$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$的任一子族，其中$G_0=\bigcup\mathscr{C}_0$. 据定义

$$\mu(G_0)=\sup\{\sum_{x\in F}f(x): F\subset G_0,\ |F|<\omega\},$$

要证明

$$\sup\{\mu(G): G\in\mathscr{C}_0\}=\mu(G_0)$$

只要说明对任意的有限子集$F\subset G_0$，存在$G\in\mathscr{C}_0$使$\mu(G)\geqslant\sum_{x\in F}f(x)$. 这显然是能够做到的，因为$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$，对每个$x\in F$，可找到$G_x\in\mathscr{C}_0$使$x\in G_x$. 又由于$\mathscr{C}_0$是向上定的，因此存在$G\in\mathscr{C}_0$使$\bigcup_{x\in F}G_x\subset G$，因为$F$为有限集，这样$F\subset G$，从而$\mu(G)\geqslant\sum_{x\in F}f(x)$.

现在假设对每个$x\in X$，$f(x)>0$，而令

$$\mathscr{F}_0=\{F\subset X: |X\setminus F|<w\}$$

则$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$且是向下定向的，易见$\bigcap\mathscr{F}_0=\phi$，如果$\mu(X)=+\infty$，则对每个$F\in\mathscr{F}_0$也有$\mu(F)=+\infty$，此时$\mu$不满足$\inf\{\mu(F): F\in\mathscr{F}_0\}=0$.

定义6 空间X上的Borel测度μ的支撑集（support）是指所

有具有以下性质的点x的集合：对x的每个开邻域u，有$\mu(u)>0$，

若记支撑集为S，而$\mu(X\setminus S)=0$，则称μ是满支撑的（fully supported）；如果$S=\phi$，测度μ即称为局部平凡的（locally trivia l）。例2中μ的支撑集便是$S=\{x\in X: f(x)>0\}$。

定理3 设X是一空间，$Y\subset X$。则子空间Y的 Borel σ-代数$\mathscr{B}(Y)=\{B\cap Y: B\in\mathscr{B}(X)\}$。特别是当$Y\in\mathscr{B}(X)$时，有$\mathscr{B}(Y)=\{B\subset\mathscr{B}(X): B\subset Y\}$。

证 $\mathscr{A}=\{B\cap Y: B\in\mathscr{B}(X)\}$显然是$Y$中的$\sigma$-代数，且$\mathscr{C}(Y)\subset\mathscr{A}$，因此$\mathscr{B}(Y)\subset\mathscr{A}$，另一方面，$\mathscr{H}=\{B\subset X: B\cap Y\in\mathscr{B}(Y)\}$是$X$中的$\sigma$-代数且$\mathscr{C}(X)\subset\mathscr{H}$。由此知$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}(Y)$。综上可知$\mathscr{B}(Y)=\mathscr{A}$。

定义7 设μ是X上的Borel测度，$Y\subset X$。则$\mu_Y=u^*\restriction\mathscr{B}(Y)$是$Y$上的一个Borel测度，我们称$\mu_Y$是Borel测度$\mu$在$Y$上的限测度（restriction）。

为什么μ_Y一定是Y上的Borel测度呢？事实上，据定理2 μ^*是X上的外测度，而且$\mathscr{B}(X)$中的元都是μ^*-可测的，再据定理1（2），有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y\cap B_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(Y\cap B_n),$$

其中$B_n\in\mathscr{B}(X)$，$n=1, 2, \cdots$。再由定理3知$\mathscr{B}(Y)=\{B\cap Y: B\in\mathscr{B}(X)\}$。也就是说$\mu_Y=\mu^*\restriction\mathscr{B}(Y)$是满足$\sigma$-可加的，因此是一个Borel测度

定理4 设μ是X上外正则的Borel测度，$Y\subset X$，则$\mu^*=\mu^*$，且μ_Y也是外正则的。

证 据μ^*，μ^*之定义直接可知对任一$A\subset X$，$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A)$。要说明$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A)$，只要说明对每个包含$A$的$B\in\mathscr{B}(X)$有$\mu^*(A)\leqslant\mu(B)$。由于$\mu$是外正则的，所以$\mu(B)=\mu^*(B)$，从而知$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)=\mu(B)$，综上所述可见$\mu^*=\mu^*$。

下面证μ_Y是外正则的，对任一$B\in\mathscr{B}(Y)$，有

$$\begin{aligned}\mu_Y(B)=\mu^*(B)&=\inf\{\mu(G):B\subset G,\ G\in\mathscr{C}(X)\}\\&\geqslant\inf\{\mu^*(G\cap Y):B\subset G,\ G\in\mathscr{C}(X)\}\\&=\inf\{\mu_Y(H):B\subset H,\ H\in\mathscr{C}(Y)\}\\&\geqslant\mu_Y(B)\end{aligned}$$

可见μ_Y是外正则的。 **证毕**

定义8 设X是一空间，$Y\subset X$，再设μ是Y上有限的Borel测度，对每个$B\in\mathscr{B}(X)$，令${}_X\mu(B)=\mu(B\cap Y)$。则${}_X\mu$是X上的Borel测度，称作从到X上的延拓测度（extension），或简称μ的延拓。

显然，$({}_X\mu)_Y=\mu$。

定理5 设X是一空间，$Y\subset X$，μ是Y上的Borel测度。μ是τ-可加的充分必要条件为${}_X\mu$是τ-可加的。

证 设μ是τ-可加的，$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}(X)$，$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$。若令$\mathscr{A}=\{G\cap Y:G\in\mathscr{C}_0\}$，则$\mathscr{A}\subset\mathscr{C}(Y)$且$\mathscr{A}\nearrow G_0\cap Y$。于是

$$\begin{aligned}{}_X\mu(G_0)=\mu(G_0\cap Y)&=\sup\{\mu(H):H\in\mathscr{A}\}\\&=\sup\{{}_X\mu(G):G\in\mathscr{C}_0\}.\end{aligned}$$

可见${}_X\mu$也是τ-可加的。

反过来，设${}_X\mu$是τ-可加的，$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{C}(Y)$且$\mathscr{A}_0\nearrow U_0$。对每个$U\in\mathscr{A}_0$，存在$\widetilde{U}\in\mathscr{C}(X)$使$U=\widetilde{U}\cap Y$。令

$$\mathscr{V}=\{\bigcup\{\widetilde{U}:U\in\mathscr{A}_1\}:\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_0,\ |\mathscr{A}_1|<\omega\},$$

则$\mathscr{V}\subset\mathscr{C}(X)$，$\mathscr{V}\nearrow V_0$，这里$V_0$满足$V_0\cap Y=U_0$，事实上很容易检验$\mathscr{V}$是开集族且是向上定向的；而$V_0=\bigcup\mathscr{V}=\bigcup\{\widetilde{U}:U\in\mathscr{A}_0\}$，故

$$V_0\cap Y=\bigcup\{\widetilde{U}\cap Y:U\in\mathscr{A}_0\}=\bigcup\mathscr{A}_0=U_0$$

于是

$$\mu(U_0)={}_X\mu(V_0)=\sup\{{}_X\mu(V):V\in\mathscr{V}\}.$$

可以证明

$$\sup\{{}_X\mu(V):V\in\mathscr{V}\}=\sup\{\mu(U):U\in\mathscr{A}_0\}$$

因此μ是τ-可加的。对于最后的这个等式，$\sup\{\mu(U):U\in\mathscr{A}_0\}\leqslant\sup\{{}_X\mu(V):V\in\mathscr{V}\}$是显然的，因为对每个$U\in\mathscr{A}_0$，$V_U=\bigcup\{\widetilde{U}\}=\widetilde{U}\in\mathscr{V}$，所以$\mu(U)={}_X\mu(V_U)\leqslant\sup\{{}_X\mu(V):V\in\mathscr{V}\}$，从而推知该不等式成立。另一方面，对于每个$V=\bigcup\{\widetilde{U}:U\in\mathscr{A}_1\}\in\mathscr{V}$，存在$U_0\in\mathscr{A}_0$使$\bigcup\mathscr{A}_1\subset U_0$，因$\mathscr{A}_0$是向上定向的。因此

$$
\begin{aligned}
{}_X\mu(V)&={}_X\mu(\bigcup\{\widetilde{U}:U\in\mathscr{A}_1\})\\
&=\mu(\bigcup\mathscr{A}_1)\leqslant\mu(U_0)\\
&\leqslant\sup\{\mu(U):U\in\mathscr{A}_0\}
\end{aligned}
$$

故而知$\sup\{{}_X\mu(V):V\in\mathscr{V}\}\leqslant\sup\{\mu(U):U\in\mathscr{A}_0\}$。

§2 Borel测度完备空间与Radon空间的古典结果

定义9 （1）如果空间X上每个有限的Borel测度总是τ-可加的，则称X是Borel测度完备的（Borel measure-complete）。

（2）如果空间X上每个有限的Borel测度总是弱τ-可加的，则称X是弱Borel测度完备的(weakly Borel measure-complete)。

显然Borel测度完备空间必是弱Borel测度完备空间，另外下述关系也是很直观的。

定理6 空间X是Borel测度完备的充要条件为X是遗传弱Borel测度完备(hereditarily weakly Borel measure-complete)，特别是当X是Borel测度完备时，X的每个子空间也是Borel测度完备的。

证 先证充分性，设μ是X上的有限Borel测度，$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}(X)$且$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$。显然$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}(G_0)$。由于$X$遗传弱Borel测度完备，因此$\mu_{G_0}=\mu\restriction\mathscr{B}(G_0)$是$G_0$上的弱$\tau$-可加的Borel测度，于是

$$
\begin{aligned}
\mu(G_0)&=\mu_{G_0}(G_0)=\sup\{\mu_{G_0}(G):G\in\mathscr{C}_0\}\\
&=\sup\{\mu(G):G\in\mathscr{C}_0\}.
\end{aligned}
$$

可见μ是τ-可加的；即X是Borel测度完备。

再证必要性，设$Y\subset X$，μ是Y上的有限Broel测度，则因μ在X上的延拓$_X\mu$是τ-可加的，故而μ也是τ-可加的。 证毕

定义10 如果空间X的每个有限的Broel测度都是Radon的，就称X是Radon空间。

引理7 设μ是X上的Borel测度。如果每个开集都是μ-Radon的，那么μ是τ-可加的。

证 设$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$且$\mathscr{C}\nearrow G_0$，设$K$是含于$G_0$中的紧子集，可以断言$K$必含在$\mathscr{C}_0$的某个元中；事实上，因$\mathscr{C}_0$是$K$的一个开复盖，$K$紧，故存在有限子复盖$\mathscr{C}_1=\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}\subset\mathscr{C}_0$，因$\mathscr{C}_0$向上定向，故有$G\in\mathscr{C}_0$使$\bigcup\mathscr{C}_1\subset G$，从而$K\subset G$。这样，就有

$$\mu(G_0)=\sup\{\mu(K): K\subset G_0,\ K\in\mathscr{K}\}$$
$$\leqslant\sup\{\mu(G): G\in\mathscr{C}_0\}.$$

相反的不等式成立是显然的；因此

$$\mu(G_0)=\sup\{\mu(G): G\in\mathscr{C}_0\}$$

这说明μ是τ-可加的。 证毕

定理8 Radon空间一定是Borel测度完备空间。

这是引理7的直接推论。

反过来，是否Borel测度完备空间也一定是Radon空间呢？回答是否定的，下面是一反例。

例3 Sorgenfrey区间$X=[0, 1)$，其拓扑由X中所有半开区间$[a, b)$为拓扑基所产生。

可以证明X是遗传Lindelöf并且它的紧子集一定是可数的。

若设$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$且$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$，$\mu$是$X$上的有限Borel测度，由于$\mathscr{C}_0$复盖$G_0$，而$G_0$是Lindelöf的，故存在可数子族$\mathscr{C}_1\subset\mathscr{C}_0$，$\mathscr{C}_1$也复盖了$G_0$。由于$\mathscr{C}_0$是向上定向的，不失一般性可设$\mathscr{C}_1=\{U_1\subset U_2\subset\cdots\subset U_n\subset\cdots\}$，由测度$\mu$的$\sigma$-可加性知$\mu(G_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(U_n)$。由此可推知$\mu(G_0)=\sup\{\mu(U): U\in\mathscr{C}_0\}$，即$\mu$是$\tau$-可加的。以上论证

说明μ是Borel测度完备的。

另一方面，如果令$\mu=\lambda\upharpoonright\mathscr{B}$，$\lambda$是$\boldsymbol{R}$上的Lebegue测度，因为对任一$x\in X$，$\mu(\{x\})=0$，而$X$中任一紧子集$K$都是可数集，故由$\sigma$-可加性知$\mu(K)=0$。这样，只要择定一测度不为0的Borel集$B$，总有$\mu(B)\neq\sup\{\mu(K):K\subset B,\ K\in\mathscr{K}\}$；也就是说$\mu$不是Radon的。

这个例子说明Borel测度完备空间不一定是Radon空间。

下面证明X是遗传Lindelöf并且它的紧子集一定是可数的。设$D\subset X$，$\mathscr{A}$是D的一个开复盖不失一般性可认为$\mathscr{A}$是由基开集所组成；每个$A\in\mathscr{A}$，都记为$A=[b_A,\ t_A)$。现在在$\mathscr{A}$中定义一个等价关系～如下：若A，$B\in\mathscr{A}$，如果存在$\mathscr{A}_{AB}\subset\mathscr{A}$使$A$，$B\in\mathscr{A}_{AB}$，而$\bigcup\mathscr{A}_{AB}$是$X$中的一个开区间$(a,\ b)$或半开区间$[a,\ b)$，则记作$A\sim B$，读在可以验证这确是一等价关系，这个等价关系所决定的分类每一类$\mathscr{A}_n$的并$\bigcup\mathscr{A}_n$必是一个区间（开的或半开）；$\mathscr{A}_n$，$\mathscr{A}_m$如果是不同的类则$(\bigcup\mathscr{A}_n)\cap(\bigcup\mathscr{A}_m)=\phi$，对于实数轴来说两两不交的区间只能有可数个；这也就是说$\mathscr{A}$可作如下分解：$\mathscr{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n$，$\bigcup\mathscr{A}_n$为区间，且区间之间两两不交。读者还不难验证，在每个$\mathscr{A}_n$中可归纳地选出一组可数族$\widetilde{\mathscr{A}}_n$使$\bigcup\widetilde{\mathscr{A}}_n=\bigcup\mathscr{A}_n$。这样$\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\{\bigcup\widetilde{\mathscr{A}}_n:n=1,2,\cdots\}$，可见$\mathscr{A}$有可数子复盖；即$D$是Lindelöf的。

现设$D\subset X$是紧子集。设$x\in[0,1]$，如果对任一$a<x$有$(a,\ x)\cap D$为无限集，则称x是关于D的左聚点，如果对任一$b>x$，有$(x,\ b)\cap D$为无限集，则称x是关于D的右聚点；特别是当$(x,\ b)\cap D$为不可数集时，称x为关于D的右不可数聚点。如果对任意的a，$b:x\in(a,\ b)$及$(a,\ b)\cap D$是不可数的，则称x是关于D的不可数聚点。类似地还可定义左不可数聚点等。以上的聚点概念是对$[0,\ 1]$的普通拓扑而言的，对于本例中的Sorgenfrey拓扑，显然$x\in X$是D（在Sorgenfrey拓扑下）的聚点（不可数聚点）之

充要条件为x是关于D（在普通拓扑下）的右聚点（右不可数聚点）。如果〔0，1〕中存在一个关于D的左聚点，则必可找到$x_n\in D$，使$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<x$，令$A_n=[x_n, x_{n+1})$，则$\{A_n: n=1, 2, \cdots\}\cup(X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$显然是$D$的两两不交的开复盖，不存在有限子复盖，与$D$紧矛盾。

现在设〔0，1〕中不存在关于D的左聚点。但若D是不可数集，则必存在关于D的不可数聚点x，由现在的假设，x是关于D的右不可数聚点；即是D的不可数聚点。取$y_n\in D$使$y_1>y_2>\cdots>y_n>\cdots>x$，则总有一个$n$，使$[y_{n+1}, y_n]\cap D$是不可数的，于是在$[y_{n+1}, y_n]$中又必存在$D$的不可数聚点$x_1$，由于$D$紧，$x_1\in D$。再对$x_1$作同样的讨论，可得不可数聚点$x_2>x_1$，$x_2\in D$。如此继续下去，可得$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$，其聚点恰是〔0，1〕中关于$D$的左聚点，矛盾！

那么，在什么条件下Borel测度完备空间才是Radon的呢？这始终是人们注目的一个问题，下面我们将证明对于局部紧空间，Borel测度完备空间一定是Radon空间。但述及的结果将更多和更一般些。

引理9 设μ是X上的Borel测度，$A_n\in\mathscr{B}$，$n=1, 2, \cdots$，且设$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，如果每个$A_n$是$\mu$-Radon的（或是$\mu$-外正则、$\mu$-内正则），则$A$也是$\mu$-Radon的（或是$\mu$-外正则、$\mu$内正则的）。

证 设每个A_n是μ-Radon的。选定$a<\mu(A)$和$N\geq 1$，使$\varepsilon=\mu(\bigcup_{n=1}^{N}A_n)-a>0$。按$\mu$-Radon的定义可以确定$K_n\in\mathscr{K}$，$K_n\subset A_n$，使

$$\mu(A_n\setminus K_n)<\varepsilon/N,\quad n=1, 2, \cdots, N.$$

由于$K=\bigcup_{n=1}^{N}K_n$是紧集，$K\subset\bigcup_{n=1}^{N}A_n\subset A$，且

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N}A_n-K)\leqslant\mu[\bigcup_{n=1}^{N}A_n\setminus K_n]$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n\setminus K_n)<\varepsilon,$$

故有

$$\mu(K)>\mu(\bigcup_{n=1}^{N}A_n)-\varepsilon=a,$$

以上说明$\mu(A)=\sup\{\mu(k):K\subset A,\ K\in\mathscr{K}\}$，即$A$是$\mu$-Radon的。

再证每个A_n是μ-外正则的情形。不妨假设每个A_n皆有$\mu(A_n)<+\infty$；如某有一个A_n使$\mu(A_n)=+\infty$，则$\mu(A)=+\infty$，引理的结论自然成立。任取$\varepsilon>0$。对每个A_n，存在$G_n\in\mathscr{C}$，使

$$\mu(G_n\setminus A_n)<\varepsilon\cdot 2^{-n}.$$

则$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$这一开集满足$A\subset G$，且

$$\mu(G\setminus A)\leqslant\mu[\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\setminus A_n]\leqslant\bigcup_{n=1}^{\infty}\mu(G_n\setminus A_n)<\varepsilon.$$

这说明A是μ-外正则的。对于每个A_n都是μ-内正则的证明完全类似，不再赘述。

证毕

引理10 设μ是X上的有限Borel测度。如果X中的每个开集是μ-内正则的，则μ是正则的。

证 设$\mathscr{A}=\{A\in\mathscr{B}:A$是$\mu$-内正则且$\mu$-外正则$\}$.则$\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$.由于$\mu$是有限的，$\mathscr{A}$对取补的运算是封闭的，再由引理9，$\mathscr{A}$对可数并运算封闭，也就是说$\mathscr{A}$是$\sigma$-代数。于是$\mathscr{A}=\mathscr{B}$.　证毕

引理11 设μ是X上外正则的Borel测度。如果每个测度有限的开集是μ-Radon的（或μ-内正则的），则每个测度有限的Borel集也都是μ-Radon的（或μ-内正则的）。

证 设$A\in\mathscr{B}$，$\mu(A)<+\infty$。任取$\varepsilon>0$，由于A是μ-外正则的，故存在$G\in\mathscr{C}$，使$\mu(G)<+\infty$且

$$\mu(G\setminus A)<\varepsilon.$$

再据$G\setminus A$的μ-外正则性，可知存在$H\in\mathscr{C}$，使$G\setminus A\subset H$且

$$\mu(H)<\varepsilon$$

另一方面，由于G是测度有限的开集，由假设知G是μ-Radon的，因而存在紧集$K\subset G$，且

$$\mu(K)>\mu(G)-\varepsilon$$

因为本章中的空间都是Hausdorff的，K是闭集，从而$C=K\setminus H$也是闭集.作为紧集之闭子集C也是紧集；同时

$$\mu(C)\geqslant\mu(K)-\mu(H)>\mu(G)-2\varepsilon$$
$$\geqslant\mu(A)-2\varepsilon.$$

据此知

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):C\subset A,\ C\in\mathscr{K}\};$$

即A是μ-Radon的.μ-内则的情形证明类同。　　　　证毕

推论12　设μ是X上的有限的Borel测度。如果每个开集是μ-Radon的，则μ是外正则和Radon的。

这是引理10和引理11的直接推论。对于无限的Borel测度，结论不真。事实上例1便是一个反例，读者可以验证例1中空间$X=Y\times[0,1]$上的Borel测度μ是Radon的但不是外正则的，这正是因为μ不是有限的。显然它也不是σ-有限的，推论12的结果能否推广到σ-有限的Borel测度的情形呢？可以，但必须附加一些条件，不过这一结果却可推广到一类特殊的σ-有限测度：即中度Borel测度（moderated Borel measure）。

定义11　设μ是空间X上的Borel测度，如果X中存在可数个开集G_n，$n=1,2,\cdots$，使$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n=X$而$\mu(G_n)<+\infty$，则称$\mu$为中度Borel测度。

定理13　设μ是空间X上的中度Borel测度。如果X中每个测度有限的开集是μ-Radon（μ-内正则）的，则μ是外正则和Radon（正则）的。

证　μ是中度Borel测度，故存在测度有限的开集G_n，$n=1,2,\cdots$，使$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n=X$。如果把测度$\mu$限制在$G_n$中的Borel集上；即考虑Borel测度$\mu_{G_n}=\mu\restriction\mathscr{B}(G_n)$，它便是有限测度。因此据推论12 μ_{G_n}是外正则和Radon的。设$A\in\mathscr{B}(X)$，那么$A\cap G_n$，$n=1,2,\cdots$，都是μ_{G_n}-外正则和μ_{G_n}-Radon的，因为$A\cap G_n$是G_n中的

Borel集，把$A\cap G_n$看作X中的Borel集，自然它也是μ-外正则和μ-Radon的。应用引理9，可知$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap G_n)$也是$\mu$-外正则和$\mu$-Radon的；所以$\mu$是外正则和Radon的。

对于每个测度有限的开集是μ-内正则蕴涵μ是正则的结论证明雷同，不再赘述。　　证毕

引理14　设μ是X上的Borel测度，$G\in\mathscr{C}(X)$而$\mu_G=\mu\upharpoonright B(G)$是弱$\tau$-可加的。如果$X$是局部紧（正则）的，则$G$是$\mu$-Radon($\mu$-内正则）的。

证　因X局部紧，对每个$x\in G$，存在开邻域U使U^-是G的紧子集。设$\mathscr{A}$是所有这样的开邻域的有限并组成之族，则$\mathscr{A}\nearrow G$。据条件μ_G是弱τ-可加的，因此

$$
\begin{aligned}
\mu(G)=\mu_G(G)&=\sup\{\mu_G(U):U\in\mathscr{A}\}\\
&\leqslant\sup\{\mu(U^-):U\in\mathscr{A}\}\\
&\leqslant\sup\{\mu(K):K\subset G,\ K\in\mathscr{K}\}\\
&\leqslant\mu(G)
\end{aligned}
$$

这说明G是μ-Radon的。第二个结论的证明从略。　　证毕

定理15　设μ是X上的中度τ-可加的Borel测度。如果X是局部紧的，则μ是外正则和Radon的；如果X是正则的，则μ是正则的。

这个定理是定理13和引理14的直接推论。它说明当X是局部紧空间时，X上的有限且τ-可加的Borel测度都是外正则和Radon的，因为有限测度自然是中度的。这就是说我们已回答了前面提出的问题而有以下结论：

推论16　局部紧和Borel测度完备的空间一定是Radon空间。

实际上我们可以得到更强一点的结果：

定理17　设X是Borel测度完备空间。如果X是局部紧（正则），则每个中度Borel测度是外正则和Radon（正则)的。

证　根据定理15只要说明每个中度Borel测度μ是τ-可加的即

可。由于μ是中度Borel测度，因此存在开集G_n，$n=1, 2, \cdots$，使$\mu(G_n)<+\infty$而$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = X$。$X$是Borel测度完备空间，由此可推知子空间也是Borel测度完备空间，事实上，对G_n上的任何一个有限Borel测度η，可以在X上定义一个可称为η的延拓的Borel测度ζ如下：对每个$B\in\mathscr{B}(X)$，令$\zeta(B)=\eta(B\cap G_n)$（容易验证$\mathscr{B}(G_n)=\{B\cap G_n: B\in\mathscr{B}(X)\}$）；由于$\zeta$有限，因而是$\tau$-可加的，由此可知$\eta$也是$\tau$-可加的。

下面证明中度Borel测度μ是τ-可加的，设$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}(X)$，$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$。则

$$\mu(G_0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mu(G_n\cap G_0).$$

任取$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n\geqslant N$时

$$\mu(G_0)-\varepsilon<\sum_{n=1}^{N}\mu(G_n\cap G_0).$$

对每个n，令$\mathscr{C}_0^n=\{U\cap G_n: U\in\mathscr{C}_0\}$，则$\mathscr{C}_0^n\subset\mathscr{C}(G_n)$，$\mathscr{C}_0^n\nearrow G_n\cap G_0$。$G_n$是Borel测度完备空间，$\mu(G_n)<+\infty$，因此

$$\mu(G_n\cap G_0)=\sup\{\mu(U\cap G_n): U\in\mathscr{C}_0\}$$

可以找到$U_n\in\mathscr{C}_0$，使

$$\mu(G_n\cap G_0)-\varepsilon\cdot\frac{1}{N}<\mu(U_n\cap G_n).$$

于是

$$\mu(G_0)<\sum_{n=1}^{N}\mu(U_n\cap G_n)+2\varepsilon.$$

由于$\mathscr{C}_0$向上定向，因此存在$U\in\mathscr{C}_0$使$\bigcup\limits_{n=1}^{N}U_n\subset U$，这样

$$\begin{aligned}\mu(G_0)&<\sum_{n=1}^{N}\mu(U\cap G_n)+2\varepsilon\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(U\cap G_n)+2\varepsilon\\&=\mu(U)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知$\mu(G_0)=\sup\{\mu(U): U\in\mathscr{C}_0\}$，即$\mu$是$\tau$-可加的。　　证毕

§ 3 Martin公理与可测基数

通常用偏序的形式来阐述马丁公理（Martin's Axiom简写作MA）．在本篇中将采用拓扑的阐述方式如下

MA：在每个满足可数链条件（Countably chain condition 简记作ccc）的非空紧空间中，小于c个的开稠集之交是非空的．

其中ccc的含意是指空间中每个互不相交的开集组成之族至多是可数的．

显然，如果空间是可分的（separable），则一定是ccc的．

定理18 设μ是空间X上σ-有限的Borel测度．如果μ的支撑集是整个空间X，则X是ccc的．

证 由于μ是X上σ-有限的Borel测度，故存在$X_n \in \mathscr{B}(X)$，$n=1, 2, \cdots$，使$\mu(X_n) < +\infty$而$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = X$．设$\mathscr{A}$是$X$中任一个二二不交非空开集组成之族．因为$X$是$\mu$的支撑集，因此每个开集的Borel测度都大于零，特别对每个$A \in \mathscr{A}$，$\mu(A) > 0$，所以

$$\mathscr{A} = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \left\{ A \in \mathscr{A} : \mu(A \cap X_n) \geqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

因为所有自然数对(n, m)总共只有可数个，而对每个$A \in \mathscr{A}$，总存在一个数对(n, m)使$\mu(A \cap X_n) > \frac{1}{m}$，因此如果$\mathscr{A}$是不可数集，则必存在一个数对$(n_0, m_0)$使

$$\left\{ A \in \mathscr{A} : \mu(A \cap X_{n_0}) \geqslant \frac{1}{m_0} \right\}$$

是不可数的．从这个不可数集中选出可数个元素$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$，那么对每个自然数$k$，

$$\mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i\right) \geqslant \frac{1}{m_0}.$$

令

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$$

则有 $\mu(B) \geqslant \frac{1}{m_0}$，于是知$B \neq \phi$。这样$B$中的元$x$将属于无数多个$A_i$，这与$A_i$是二二不交的条件矛盾。　　证毕

从下述定理可以看出ccc这一条件在MA中的作用。

定理19　连续统假设（Continuum Hypothesis，简记为CH）等价于下述命题：在每个非空紧空间中，小于c个开稠集之交是非空的。

证：若CH成立，应用著名的Baire范畴定理（Baire category theorem）：在Čech-完备空间X中，无处稠集（nowhere dense sets）A_i，$i=1, 2, \cdots$，的可数并$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$是余稠集（co-dense set）；即$X \setminus A$在$X$中稠，便可知道小于$c$个开稠集之交；在CH下也就是可数个开稠集之交仍为稠密集，因此是非空的。

反过来，如果CH不成立；$\omega_1 < c$，设ω_1+1是赋予序拓扑的空间，$X=(\omega_1+1)^{\omega}$是乘积空间，对于Tychonoff乘积，紧空间的积仍是紧的；因此X是紧空间，设A是ω_1+1中所有孤点序数（isolated ordinals）之集合。对每个$\alpha \in A$令

$$G_\alpha = \{x \in X : \alpha \in x(\omega)\}$$

其中$x(\omega)$表示$x:\omega \to \omega_1+1$之值域，显然G_α是一开稠集，但$\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha = \phi$。事实上如果存在$x \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$，则$x:\omega \to A$将是一个到上的映射，这与$|A|>\omega$是矛盾的。由此可见小于$c$个$(|A|=\omega_1<c)$开稠集之交非空之论断亦不真。　　证毕

推论20　CH⇒MA。

定义12　X上的Borel测度μ如果满足$\mu(\{x\})=0$，x是X中任一元，则称μ是零散的（diffused）。

定义13　设κ是一基数，如果存在一离散空间X，$|X|=\kappa$，和X上的一个零散的Borel概率测度（Borel probability，即满足$\mu(X)=1$的Borel测度），则称κ是实值可测的（real-valued measurabable）。如果μ是2值的（2-valued，即测度值只有0和1两个数），则称κ是2-值可测的（2-valued measurable）。

据定义可知2-值可测基数一定是实值可测的，如果$\alpha<\beta$，α是2-值可测（实值可测）基数，则β也是2-值可测（实值可测）的。事实上，如果α是2-值可测的，则存在离散空间X，$|X|=\alpha$，和X上的零散的Borel概率2-值测度μ。我们令$Y=X\cup(\beta\setminus X)$，赋予离散拓扑，而在$\mathscr{B}(Y)$上定义$\mu$的延拓Borel测度$\eta$：$\eta(A)=(A\cap X)$，$A\in\mathscr{B}(Y)$，则$\eta$便是$Y$上的一个零散的Borel概率2-值测度。对于实值可测基数也可作同样的论证。

回忆某些关于基数的基本概念。

基数κ称为正则的（regular）是指$cf(\kappa)=\kappa$成立。这里$cf(\kappa)$表示κ的共尾子（cofinality）。即所有与κ共尾的基数中最小的一个基数。

κ称为极限基数（limit cardinal）是指任一小于κ的基数η，其后继基数η^+也小于κ。所谓η的后继基数是指比η大的基数中最小的一个。

κ称为强极限基数（strongly limit cardinal）是指满足下述条件：如果基数$\eta<K$则$2^\eta>\kappa$。

κ称为弱不可达基数（weakly inaccessible cardinal）是指它是$>\omega$的正则极限基数。

κ称为强不可达基数（strongly inaccessible cardinal）是指它是$>\omega$的正则强极限基数。

下面阐明的关于可测基数的命题，读者可以从例如T.Jech所著的《集合论》（[5]）中找到证明。

定理21　（1）第一个实值可测基数是弱不可达基数；第一个

2-值可测基数是强不可达基数.

（2）基数 c 不是2-值可测的.

（3）如果 c 不是实值可测的，则2-值可测和实值可测是等价的.

（4）MA蕴涵c不是实值可测的.

定理22 可测基数不存在是与ZFC相容的（consistent），进而言之，在ZFC中下述命题等价相容（即如果其中一个命题与ZFC相容，则其余命题亦相容）

（1）存在2-值可测基数，

（2）存在实值可测基数，

（3）基数 c 是实值可测的，

（4）实数集R上的Lebesgue测度λ可以延拓到$\mathscr{P}(R)$.

§4 完全正则空间是Radon空间的充要条件及其它相容性结果

在§2中我们已经知道局部紧和Borel测度完备空间一定是Radon空间。局部紧空间一定是完全正则空间（注意本章中讨论的空间都是Hausdorff空间）。本节将继续这一问题的讨论。首先给出局部紧空间是Radon空间的一个较弱的充分条件（定理27）。然后给出判定完全正则空间是否是Radon空间最一般的准则——一个充分必要条件(定理37)。读者将会看到这一问题与实值可测基数的存在有着密切的关系，在前一节已知不存在实值可测基数是与ZFC相容的。因此这些命题都可导至一些相容性的结果。最后，从另一角度，在 $MA+\urcorner CH$ 的集论假设下，再给出局部紧空间是Radon空间的另一些充分条件。

引理23 对于任一空间，下述命题等价

（1）在X上存在（内正则）Borel测度μ，集 $Y\in\mathscr{B}(X)$ 以

及Y的一个两两不交的开复盖$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}(Y)$，使$0<\mu(Y)<+\infty$而$\mu(G)=0$对每个$G\in\mathscr{C}_0$成立。

（2）存在（闭的）离散集$T\subset X$，$|T|=\kappa$是实值可测基数。

证 先证（1）$\Longrightarrow$（2）。令

$$\nu(\mathscr{H})=\frac{1}{\mu(Y)}\mu(\bigcup\mathscr{H}),$$

其中$\mathscr{H}\subset\mathscr{C}_0$是任一开子族。下面证明$\mathscr{C}_0$的基数必是实值可测基数。对每个非空开集$G\in\mathscr{C}$，择定一个$x_G\in G$，令

$$T=\{x_G:G\in\mathscr{C}_0,\ G\neq\phi\}.$$

由于$\mathscr{C}_0$是两两不交的，因此T是一个离散集。T显然是子空间Y中的闭集且$|T|=|\mathscr{C}_0|$。设$A\subset T$，记$\mathscr{H}_A=\{G\in\mathscr{C}_0:x_G\in A\}$。在$T$上定义一个测度$\eta$如下$\eta(A)=\nu(\mathscr{H}_A)$；可以验证$\eta$确是$T$上的一个零散的Borel概率测度。因此$|T|$是实值可测基数。

当μ是内正则时，存在$F\in\mathscr{F}(X)$使$F\subset Y$而$\mu(F)>0$，在以上论证中，用F代替Y，用F中的开复盖$\{G\cap F:G\in\mathscr{C}_0\}\subset\mathscr{C}(F)$代替$\mathscr{C}_0$，则所得的$T$便是$X$中的闭集了。

下面证（2）$\Longrightarrow$（1）。设ν是T上零散的Borel概率测度。则测度ν到X上的延拓$_X\nu$便是X上的一个Borel概率测度。令$Y=T$。由于T是Y中的离散集，因而对每个$x\in T$，存在$G_x\in\mathscr{C}(X)$使$\{G_x:x\in T\}$是两两不交的，且显然有$_X\nu(G_x)=\nu(G_x\cap T)=\nu(\{x\})=0$。

当T是闭集时，由于ν是T上的有限且内正则的Borel测度，故其延拓$_X\nu$也是内正则的。

这一引理使我们看到了可测基数的存在与空间上存在某种“零散”特性的Borel测度的自然关系。下面我们引进一种复盖概念，它与测度的完备性有着紧密的连系，而这种连系又与可测

基数的存在性有关。

定义14 如果空间X的每个开复盖有一个开加细$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n$具有如下性质：对任一$x\in X$，存在自然数$n_x$，使$1\leqslant|st(x,\mathscr{U}_{n_x})|<\omega$，则称$X$是弱$\theta$-可加细的（weakly θ-refinable）。

定理24 定义14中的条件"$1\leqslant|st(x,\mathscr{U}_{n_x})|<\omega$"可减弱为"$|st(x,\mathscr{U}_{n_x})|=1$。"

证 设$\mathscr{U}$是X的一个开复盖而$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n$是具有下述性质的一个开加细：对任一$x\in X$，存在自然数$n_x$使$1\leqslant|st(x,\mathscr{U}_{n_x})|<\omega$。现在对$\mathscr{U}_n$，$n=1,2,\cdots$作如下"加工"，便可得到满足较弱条件的开加细$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{V}_n$。对$n$，$k\in N$，令

$$E(n,k)=\{z\in X:|st(z,\mathscr{U}_n)|=k\}.$$

由所给的条件可知$\bigcup_{n,k\in N}E(n,k)=X$，再令

$$W(x,n)=\bigcap\{G\in\mathscr{U}_n:x\in G\}.$$

$$\mathscr{F}_{nk}=\{W(x,n)\cap E(n,k):x\in E(n,k)\}.$$

$\bigcup_{n,k\in N}\mathscr{F}_{nk}$也是$\mathscr{U}$的一个加细。对于每个$\mathscr{F}_{nk}$，我们可证明它有下述性质：每个$F\in\mathscr{F}_{nk}$，可以找到一开集$G_F$，使$F\subset G_F\subset U$，$U$是$\mathscr{U}$中某个元素；而且对其它的$\widetilde{F}\in\mathscr{F}$，即$\widetilde{F}\neq F$，有$G_F\cap\widetilde{F}=\phi$。事实上，若$F=W(x,n)\cap E(n,k)\in\mathscr{F}_{nk}$，可以令$G_F=W(x,n)$便能满足上述要求；因为如果$\widetilde{F}=W(x,n)\cap E(n,k)\in\mathscr{F}_{nk}$，$\widetilde{F}\neq F$，必有$W(x,n)\neq W(x_0,n)$。注意到$x,x_0\in E(n,k)$，所以$W(x,n)$，$W(x_0,n)$都是$\mathscr{U}_n$中$k$个元素之交；$W(x,n)=\bigcap_{i=1}^{k}G_i^x$，$W(x_0,n)=\bigcap_{i=1}^{k}G_i^{x_0}$；故当$W(x,n)\neq W(x_0,n)$时，必有某个$G_j^{x_0}\neq G_i^x$，$i=1,2,\cdots,k$，这样

$$W(x,n)\bigcap\widetilde{F}\subset\left(\bigcap_{i=1}^{k}G_i^x\right)\cap G_j^{x_0}\cap E(n,k),$$

而包含式右端必为空集，故有$W(x,n)\cap\widetilde{F}=\phi$。现在把$\{\mathscr{F}_{nk}:n,k\in N\}$重新编号为$\{\mathscr{F}_n:n=1,2,\cdots\cdots\}$。而令$v_n=\{G_F:F\in\mathscr{F}_n\}$，那么$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{V}_n$便是满足：任一$x\in X$，存在$n_x\in N$，使

$|st(x,\mathscr{V}_{n_x})|=1$的开加细族。 证毕

关于弱θ-可加细等复盖性质可详见[6]。

引理25 （1）空间X是Borel测度完备当且仅当X上每个Borel概率测度是满支撑的。

（2）空间X是弱Borel测度完备当且仅当X上每个Borel概率测度有非空的支撑集。

证 首先证（2）。如果X是弱Borel测度完备的，而对X上某个Borel概率测度μ，其支撑集$S=\phi$；即每个$x\in X$都是局部平凡的。令$\mathscr{C}_0=\{G\in\mathscr{C}:\mu(G)=0\}$。应有$\mathscr{C}_0\nearrow X$；$\mathscr{C}_0$向上定向是显然的；设若存在$x\in X\setminus\bigcup\mathscr{C}_0$，则因$X$局部平凡，有$x$之开邻域$U$，使$\mu(U)=0$，故$U\in\mathscr{C}_0$这与$x\in X\setminus\bigcup\mathscr{C}_0$矛盾。这样，由于$X$弱Borel测度完备故知$\mu(X)=0$，这与$\mu$是概率测度矛盾。

反过来，设X上每个Borel概率测度有非空的支撑集。如果某个Borel概率测度μ不是弱τ-可加的；即有$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$，$\mathscr{C}_0\nearrow X$，而

$$\sup\{\mu(G):G\in\mathscr{C}_0\}=a<\mu(X).$$

对每个$n\in N$，存在$G_n\in\mathscr{C}_0$使$G_n\subset G_{n+1}$而

$$\mu(G_n)>a-\frac{1}{n}.$$

令$G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，则把$\mu$限制在$X\setminus G_0$然后再延拓到$X$再除以$1/\mu(X)-a$所得的测度

$$\nu=\frac{1}{\mu(X)-a}\cdot x(\mu_{X\setminus G_0})$$

仍是X上的Borel概率测度；这只要验证$\nu(X)=1$。事实上$x(\mu_{X\setminus G_0})(X)=\mu_{X\setminus G_0}(x\setminus G_0)=\mu(X)-\mu(G_0)=\mu(X)=1$；因为$\mu(G_0)=1$。

我们来证明这样导出的Borel概率测度ν是局部平凡的，从而与X上每个Borel概率测度有非空的支撑集的前提矛盾。事实上，因为$\bigcup\mathscr{C}_0=X$，只要说明每个$G\in\mathscr{C}_0$都有$\mu(G)=0$就够了。如

果某个$G\in\mathscr{C}_0$有$\nu(G)>0$，则$\mu(G\setminus G_0)>0$，故而

$$\lim_{n\to\infty}(\mu(G\cup G_n))=\mu(G\cup G_0)=\mu(G_0)+\mu(G\setminus G_0)>a.$$

从而知道某个G_N满足$\mu(G\cup G_N)>a$。由于$\mathscr{C}_0$向上定向可得$\widetilde{G}\in\mathscr{C}_0$使$G\cup G_N\subset\widetilde{G}$，从而$\mu(\widetilde{G})>a$；这与$\sup\{\mu(G):G\in\mathscr{C}_0\}=a$矛盾。

（1）是（2）的推论，我们把证明留给读者。　　证毕

定理26　设X是弱θ-可加细空间。如果X不含具有实值可测基数的离散子集，则X是弱Borel测度完备的。

证　如果X不是弱Borel测度完备的，则由引理25，存在某个Borel概率测度μ，它的支撑集是空集；即μ是局部平凡的；对每个$x\in X$，存在开邻域U_x使$\mu(U_x)=0$，$\{U_x:x\in X\}$是X的一个开复盖。因X是弱θ-可加细的，据定理25，存在开加细$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n$满足下述条件：对每个$x\in X$，存在自然数$n_x$使$|st(x,\mathscr{U}_{n_x})|=1$。令

$$X_n=\{x\in X:|st(x,\mathscr{U}_n)|=1\},n=1,2,\cdots,$$

则$\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n=X$且$X_n\in\mathscr{B}(X)$，这是因为

$$X_n=\{x\in X:|st(x,\mathscr{U}_n)|\geqslant1\}\setminus\{x\in X:|st(x,\mathscr{U}_n)|\geqslant2\}$$

是两个开集之差，因为$\mu(X)=1$，故必存在$n\in\boldsymbol{N}$，使$\mu(X_n)>0$.我们令$Y=X_n$，则

$$\mathscr{C}_0=\{G\cap Y:G\in\mathscr{U}_n\}$$

便是一个互不相交的开集组成之族，而且每个$G\cap Y\in\mathscr{C}_0$有$\mu(G\cap Y)\leqslant\mu(G)\leqslant\mu(U_x)=0$，其中$U_x$是包含$G$的而测度为零的开邻域，所以$\mu(G\cap Y)=0$。据引理23将蕴涵$X$中存在具有实值可测基数的离散子集这一命题，这与本定理的假设矛盾。这一矛盾说明一开始假定X不是弱Borel测度完备是错误的。

证毕

定理27　设X是遗传弱θ-可加细空间，且X不包含具有实值

可测基数的离散子集，如果X是局部紧（正则）的，则X上每个中度Borel测度是外正则和Radon（正则）的。

这个定理是定理6、定理17和定理26的推论。它的一个直接推论便是：局部紧空间如果是遗传弱θ-可加细的且不包含具有实值可测基数的离散子集，则它一定是Radon空间。下面我们将进一步给出完全正则空间是Radon空间的充要条件。为此，首先引进一些概念。

定义15 如果空间X上每个有限τ-可加的Borel测度都是Radon测度，就称X为pre-Radon空间。

由此定义立刻可推知

定理28 空间X是Radon空间的充要条件为它是pre-Radon空间且是Borel测度完备的。

在什么情况下，pre-Radon空间的子空间也是pre-Radon的呢？

引理29 设μ是空间Y上有限的正则Borel测度，$X\subset Y$，如果μ是τ-可加的，则μ在X上的限制μ_X也是τ-可加的。

证 设$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}(X)$且$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$。对每个$G\in\mathscr{C}_0$确定一个$\widetilde{G}\in\mathscr{C}(Y)$使$\widetilde{G}\cap X=G$，令

$$\mathscr{H}=\{\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{C}_1\}:\mathscr{C}_1\subset\mathscr{C}_0,|\mathscr{C}_1|<\omega\}$$

则$\mathscr{H}\subset\mathscr{C}(Y)$，$\mathscr{H}\nearrow H_0$而$H_0\cap X=G_0$。事实上$\mathscr{H}$向上定向是明显的，只要说明最后一个等式成立即可。因$H_0=\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{C}_0\}$，故

$$H_0\cap X=\bigcup\{\widetilde{G}\cap X:G\in\mathscr{C}_0\}=\bigcup\mathscr{C}_0=G_0.$$

据引理的条件，知

$$\mu(H_0)=\sup\{\mu(H):H\in\mathscr{H}\},$$

任给$\varepsilon>0$，存在$H\in\mathscr{H}$使$\mu(H_0\setminus H)<\varepsilon$而$H\cap X\in\mathscr{C}_0$。事实上，据上确界定义，存在$\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{C}_1\}\in\mathscr{H}$，使$\mu(H_0\setminus\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{C}_1\})<\varepsilon$成立。由于$\mathscr{C}_0$是向上定向的，因此存在$G_1\in$

$\mathscr{C}_0$使$\bigcup\mathscr{C}_1\subset G_1$。这样，

$$\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{C}_1\}\subset(\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{G}_1\})\bigcup\widetilde{G}_1$$

可令$H=(\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{C}_1\})\bigcup\widetilde{G}_1$，则有$H\cap X=G_1\in\mathscr{C}_0$。而且因$\bigcup\{\widetilde{G}:G\in\mathscr{C}_1\}\subset H\subset H_0$仍满足$\mu(H_0\setminus H)<\varepsilon$。

于是我们有

$$\mu_X[G_0\setminus(H\cap X)]=\mu^*[(H_0\setminus H)\cap X]\leqslant\mu(H_0\setminus H)<\varepsilon.$$

这说明μ_X是τ-可加的。 证毕

定义16 （1）设X是空间Y的子空间。如果对于Y上每个有限的Radon测度μ之外测度μ^*，X是μ^*-可测的，则称X在Y中是Radon可测的。

（2）如果对任何一个包含X的空间Y，X总是在Y中Radon可测，则称X是泛Radon可测的（universally Radon measurable）。

定理30 设X是pre-Radon空间Y的子空间，下述命题等价：

（1）X是泛Radon可测的；

（2）X在Y中Radon可测；

（3）X是pre-Radon空间。

证 （1）$\Longrightarrow$（2）显然。

（2）$\Longrightarrow$（3）。设μ是X上有限的τ-可加的Borel测度。据定理5 μ在Y上的延拓${}_Y\mu$也是有限且τ-可加的Borel测度，而Y是pre-Radon空间因此${}_Y\mu$是有限的Radon测度。据（2），可知X是$({}_Y\mu)^*$-可测的。再据定理3和定理2（1）又可知每个$B\in\mathscr{B}(X)$也是$({}_Y\mu)^*$-可测的；事实上，$B=\widetilde{B}\cap X$，$\widetilde{B}\in\mathscr{B}(Y)$，与$X$都是$({}_Y\mu)^*$-可测的。由于对每个$({}_Y\mu)^*$-可测集$A$，都可找到$Y$中的Borel集$Q$使$A\subset Q$而${}_Y\mu(Q)=({}_Y\mu)^*(A)$，所以利用定理2（3）可以找到$E$，$H\in\mathscr{B}(Y)$使$E\subset B\subset H$，且${}_Y\mu(E)={}_Y\mu(H)$。因为

$${}_Y\mu(E)=\mu(E\cap X)\leqslant\mu(B)\leqslant\mu(H\cap X)={}_Y\mu(H),$$

故

$$\mu(B)={}_Y\mu(E)=\sup\{{}_Y\mu(K):K\subset E,\ K\in\mathscr{K}(Y)\}$$
$$\leqslant\sup\{\mu(K):K\subset B,\ K\in\mathscr{K}(Y)\}\leqslant\mu(B)$$

这说明μ是Radon的。

（3）$\Longrightarrow$（1）．设Z是包含X的空间，μ是Z上有限的Radon测度．据定理8和定义7知μ_X是有限的且τ-可加的Borel测度．再由（3）知μ_X是Radon测度．于是对每个$n\in N$，存在$K_n\in\mathscr{K}(X)$，使$\mu_X(X\setminus K_n)<\frac{1}{n}$令$K=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$．则

$$\mu^*(X\setminus K)=\mu_X(X\setminus K)=0.$$

再应用定理2（3）可断定X是μ^*-可测的． 证毕

推论31 设X是Radon空间，子空间$Y\subset X$是Radon空间的充要条件为它在X中Radon可测。

事实上，如果Y是Radon空间，则据定理28Y是pre-Radon空间且是Borel测度完备空间．这样由定理30知Y是X中的Radon可测集．反过来，如果Y是X中的Radon可测集，据定理30 Y是pre-Radon．再由于X是Radon空间，故据定理8是Borel测度完备的，按定理6，Y也是Borel测度完备的，最后应用定理28，Y是Radon空间。

据定理17可知紧空间都是pre-Radon空间，而据定理30，空间X在任何一个包含它的pre-Radon空间中如果Radon-可测便可得知它是pre-Radon空间，因而还可得到下述推论．这首先是由Knowles证明的（[7]）．

推论32 设X是完全正则空间（Completely regular space）．X是pre-Radon空间当且仅当X在βX中是Radon-可测的，其中βX是X的Stone-Čech紧化（Stone-Čech compactification）．

关于Stone-Čech紧化的概念可参见[8]。

这是一个极其重要的结论．应用它可推知判定完全正则空间是否为Radon空间的最一般准则（定理37）；还可得到许多推论，有些已知结果也可作为其特款．

推论33 完全正则空间X若是βX中的Borel子集，则X是pre-Radon空间．

这是因为Borel子集是Radon可测集．

推论34 完全正则的Čech完备（Čech－Complete）空间是pre-Radon空间．

Čech完备空间是指满足如下条件的空间：空间X的Stone-Čech紧化的增长（remainder）$\beta X\setminus X$是βX中的F_σ集，因而是Borel集．

推论35 局部紧空间是pre-Radon空间．

这一推论实际上就是定理17中的一部分结论，局部紧空间一定是完全正则空间；同时βX中的子空间A是局部紧的充要条件是A能表示成$F\cap V$之形式；其中F是βX中之闭集而V是βX中之开集（见〔8〕3.3.10），因此当X是局部紧空间时，它是βX中的Borel集．

推论36 完备的可度量空间（Completely metrizable space）是pre-Radon空间．

所谓完备可度量空间即是存在完备度量ρ的空间；即关于ρ的每个哥西列（Cauchy sequence）都收敛的空间．因为完备可度量空间的充要条件是Čech完备的度量空间（见〔8〕4.3.26），因此据推论34完备可度量空间是pre-Radon的．

定理37 设X是完全正则和遗传弱θ-可加细的空间；X不含具有实值可测基数的离散子集，则X是Radon空间之充要条件为X在其Stone-Čech紧化βX中是Radon可测的．

证 定理26告诉我们，当空间Y是弱θ-可加细且不含具有实值可测基数的离散子集，则Y是弱Borel测度完备的．据本定理之

条件，X的每个子空间Y都满足定理26之条件，因此都是弱Borel测度完备的；也就是说X是遗传弱Borel测度完备的。据定理6可知X是Borel测度完备的。

推论32说X是pre-Radon空间之充要条件为X在βX中Radon可测；定理28则说X是Radon空间之充要条件是pre-Radon和Borel测度完备，已经证明X是Borel测度完备，因此X是Radon空间之充要条件为X在βX中Radon可测。 证毕

应用这个定理可得到著名的Marezowski和Sikorski定理([9])如下：

定理38 设X是完备可度量空间，且X不含具有实值可测基数的离散子集，则X是Radon空间。

事实上，X是度量空间，因而是仿紧的(paracompact)。它的每个子空间当然也是可度量因而是仿紧的，仿紧空间显然是弱θ-可加细的；即X是遗传弱θ-可加细的，另外完全可度量空间是完全正则和Čech完备的，因而由推论34、定理30，X是pre-Radon的，故据定理37便知X是Radon空间。

由定理22，不存在可测基数是与ZFC相容的，因此可有以下推论。

推论39 下述命题是与ZFC相容的：

(1) 设X是完全正则和遗传弱θ-可加细的空间，则X是Radon空间之充要条件为X在其Stone-Čech紧化βX中是Radon可测的。

(2) 完备可度量空间是Radon空间。

我们再回到局部紧空间是Radon空间的充分条件的讨论。由定理27可知这涉及弱θ-可加细的概念；在ZFC中下述命题是相容的，局部紧的遗传弱θ-可加细空间一定是Radon的。下面我们将从另外一个角度讨论充分条件，首先回忆下述概念

亚紧空间(metacompact space)：空间X的每个开复盖有一

个点有限（point-finfte）的加细$\mathscr{U}$；点有限是指对任一$x\in X$，$st(x,\mathscr{U})$总是有限集。

亚-Lindeeöf空间（meta-Lindelöf space）。空间X的每个开复盖有一个点可数（point-coutable）的加细$\mathscr{U}$；点可数是指对任一$x\in X$，$st(x,\mathscr{U})$至多为可数集。

显然，弱θ-可加细是亚紧概念的推广。但亚-Lindelöf是亚紧概念从另一角度的推广。自然可问局部紧且遗传亚-Lindelöf空间是否也是Radon的呢？这一问题的回答可以不涉及可测基数，但在ZFC中仍不能回答。

引理40 设X是满足ccc的空间，$\{H_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathscr{C}$且满足$H_\beta\subset H_\alpha$，$\alpha<\beta<\omega_1$。则必存在$\gamma<\omega_1$使$H_\alpha^- = H_\gamma^-$对一切$\gamma\leqslant\alpha<\omega_1$的$\alpha$成立。

证 如若不然，对每个$\alpha<\omega_1$，存在$\beta(\alpha)$使$\alpha<\beta(\alpha)<\omega_1$且$H_{\beta(\alpha)}^-\subsetneqq H_\alpha^-$。令$\alpha_0=\beta(0)$，而当对每个$\gamma<\kappa<\omega_1$，$\alpha_\gamma$都已定义时，令$\alpha_K=\beta(\tau)$，$\tau=\sup\{\alpha_r:r<\kappa\}$。则可认为$\alpha_r$对一切$r<\omega_1$都已定义。而且满足$H_{\alpha_r}^-\setminus H_{\beta(\alpha_r)}^-\neq\phi$。自然地也有

$$H_{\alpha_r}\setminus H_{\beta(\alpha_r)}^-\neq\phi.$$

这样，$\{H_{\alpha_r}\setminus H_{\beta(\alpha_r)}^-:r<\omega_1\}$便是两两不交的非空开集族；这与ccc矛盾。

证毕

引理41 （MA+$\neg$CH） 设X是满足ccc的局部紧空间，则X中每个点可数的集族$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$是可数的。

证 反设存在不可数的子族$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$。令$f:\omega_1\to\mathscr{C}_0$为一映射。且记$f(\alpha)=G_\alpha$再记$H_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\leq\beta<\omega_1}G_\beta$，则据引理40，存在$r<\omega_1$使$H_\alpha^-=H_r^-$对一切$\alpha$；$r\leqslant\alpha<\omega_1$成立。在$H_r$中择定一开子集$E$，使$E^-$是紧的，因$X$局部紧，自然能做到这一点。再令$E_\alpha=E\cap H_\alpha$。因$E$是开集，$E^-$满足ccc，而且当$r\leqslant\alpha<\omega_1$时，$E^-=E_\alpha^-$。在$E^-$上应用马丁公理，可知$D=\bigcap\limits_{r\leqslant\alpha<\omega_1}E_\alpha$是非空的。对每

个$x\in D$，$|st(x,\mathscr{C}_0)|\geqslant\omega_1$。这与$\mathscr{C}_0$是点可数族矛盾。　　证毕

定理42　（MA+┐CH）局部紧的亚-Lindelöf 空间如果满足ccc则一定是Lindelöf的。

这是引理41的直接推论。事实上，因空间是亚-Lindelöf的，故每个开复盖有点可数的加细。据引理41这个加细只能是可数的。

定理43　（MA+┐CH）设X是局部紧和遗传亚-Lindelöf空间。如果X满足ccc，则X是Radon空间。

证　据定理42X是Lindelöf的。下面证明X是Borel测度完备空间。设μ是X上的有限Borel测度，$\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$，$\mathscr{C}_0\nearrow G_0$。由于$\mathscr{C}_0$复盖了$G_0$，由Lindelöf性质，存在$\mathscr{C}_1\subset\mathscr{C}_0$，$|\mathscr{C}_1|\leqslant\omega$，使$\bigcup\mathscr{C}_1=G_0$。不妨设

$$\mathscr{C}_1=\{G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n\cdots\}$$

事实上如果$\mathscr{C}_1=\{U_i:i=1,2,\cdots\}$，可令$G_1=U_1$，而当选定$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n$时，由$\mathscr{C}_0$之定向性，可找到$G_{n+1}\in\mathscr{C}_0$，使$\bigcup\{U_i\cup G_i:i=1,2,\cdots n\}\subset G_{n+1}$，从而得到逐一包含的新族$\mathscr{C}_1$，据$\mu$之$\sigma$-可加性可知$\mu(G_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(G_n)$，从而可知

$$\mu(G_0)=\sup\{\mu(G):G\in\mathscr{C}_0\}.$$

既然X是Borel测度完备又是局部紧的，由推论16可知X是Radon空间。　　证毕

如果再减弱一下ccc这一条件，那么在MA+┐CH下我们可得到一个涉及可测基数存在性的充分条件。

若空间X中任何一点x都有一个邻域U满足ccc，则称X是局部ccc（ccc locally）。

设$\mathscr{A}$是一集族，如果对每个$A\in\mathscr{A}$，$\{B\in\mathscr{A}:B\cap A\neq\phi\}$总是有限（可数）的，则称$\mathscr{A}$是star-有限（star-可数）的。

引理44　任意一个star-可数集族总能分解为两两不交的可数子族；即$\mathscr{A}=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Pi\}$，$\mathscr{B}_\alpha$为可数集且$(\bigcup\mathscr{B}_\alpha)\cap$

$(\bigcup\mathscr{B}_\beta)=\phi$，$\alpha\neq\beta$。

证 对A，$B\in\mathscr{A}$，若$\mathscr{A}$中有一有限子族$\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$满足$A=C_1$，$B=C_n$，而对$i:1\leqslant i<n$，有$C_i\cap C_{i+1}\neq\phi$，则称$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$是从$A$到$B$的一个链（chain），现令

$$\mathscr{B}(A)=\{B\in\mathscr{A}:在\mathscr{A}中存在从A到B的链\}.$$

因为$\mathscr{A}$是star-可数的集族，因此$\mathscr{B}(A)$是可数集；读者不难归纳地完成这一事实的证明。对A_1，$A_2\in\mathscr{A}$，$(\bigcup\mathscr{B}(A_1))\cap(\bigcup\mathscr{B}(A_2))=\phi$的充要条件是$\mathscr{B}(A_1)=\mathscr{B}(A_2)$；事实上，如果$(\bigcup\mathscr{B}(A_1))\cap(\bigcup\mathscr{B}(A_2))=\phi$，则总存在$B_1\in\mathscr{B}(A_1)$，$B_2\in\mathscr{B}(A_2)$使$B_1\cap B_2=\phi$。对每个$B\in\mathscr{B}(A_2)$，由$\mathscr{B}(A_2)$之定义知在$\mathscr{A}$中存在从$B_2$到$B$的链，从而存在由$B_1$到$B$的链。再由$B_1\in\mathscr{B}(A_1)$，可知在$\mathscr{A}$中也存在从$A_1$到$B_1$的链。于是知存在从$A_1$到$B$的链；故$B\in\mathscr{B}(A_1)$。这就证明了$\mathscr{B}(A_2)\subset\mathscr{B}(A_1)$。相反的包含式同理可证，故$\mathscr{B}(A_1)=\mathscr{B}(A_2)$。将所有的$B(A)$编码，设编码集为$\Pi$，便得到$\mathscr{A}=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Pi\}$。 证毕

引理45 设X是正则空间。如果X的每个开复盖有star-可数的开加细，则X是仿紧的。

证 设$\mathscr{U}$是X的一个开复盖。如果$\mathscr{U}$有star-可数的开加细$\mathscr{V}$，则据引理44，$\mathscr{V}$可作分解$\mathscr{V}=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Pi\}$，$\mathscr{B}_\alpha$是可数族，且当$\alpha\neq\beta$时，$(\bigcup\mathscr{B}_\alpha)\cap(\bigcup\mathscr{B}_\beta)=\phi$，记

$$\mathscr{B}_\alpha=\{B_{\alpha n}:n\in N\}.$$

则

$$\mathscr{C}_n=\{B_{\alpha n}:\alpha\in\Pi\}$$

是离散的开集族；这是因为$\bigcup\mathscr{B}_\alpha$，$\alpha\in\Pi$，两两不交且构成对$X$的复盖，因此任一$x\in X$，必属某个$\bigcup\mathscr{B}_{\alpha_0}$，故而存在开邻域至多与$B_{\alpha_0 n}$相交。这样$\bigcup\limits_{n\in N}\mathscr{C}_n$便是$\sigma$-离散的开加细。仿紧性等价于每个开复盖有$\sigma$-有限的开加细（见本书第四章§2定理7），故可断定X是仿紧的。 证毕

引理46 (MA+ ⌉CH)满足局部ccc的局部紧亚-Lindelöff空间是仿紧的.

证 设X是局部紧、亚-Lindelöf空间且满足局部ccc. $\mathscr{U}$是X的一个开复盖. 则必存在点-可数的开加细$\mathscr{C}_0$, 且每个$G\in\mathscr{C}_0$都满足ccc, 据引理41, $\mathscr{C}_0$是star-可数的; 事实上G是局部紧和ccc的, 则据引理41$\{U\in\mathscr{C}_0: G\cap U\neq\phi\}$是可数集, 再据引理45便知$X$是仿紧的. 证毕

定理47 (MA+ ⌉CH) 设X局部紧且是遗传亚-Lindelöf空间, 当X满足局部ccc且不含具有实值可测基数的离散子集时, X是Radon空间.

证 据引理46, X的每个开子空间U是仿紧的; 因为由X之局部紧可知U也是局部紧, 又由遗传亚-Lindelöf可知U是亚-Lindelöf的. 既然U仿紧, 故而是弱θ-可加细的. 再由定理26可知U是弱Borel测度完备的, 从而知X是Borel测度完备. 最后据推论16知X是Radon空间. 证毕

参 考 文 献

〔1〕V.S.Varadarajan, Measure on topological spaces, Mat. Sbornik, 55, 35-100(Russian); English translation; Amer.Math.Soc.Transl., 48(1965)161-228.

〔2〕R.J.Gardner, Borel measure, Handtook of set-theoretic topology, Edited by K.Kunen and J.Vaughan, North-Holland, 1984, 963-1043.

〔3〕P.R.Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York, 1950.

〔4〕W.F.Pfeffer, Intgrals and Measure, Springer-Verlag, New York, 1971.

〔5〕T.Jech, Set theory, Academic press, 1978.

〔6〕 D.K.Burke, Covering properties, Handbook of set-theoretic topology, 1984, 347-422.
〔7〕 J.D.Knowles, Measure on topological spaces, proc. London Math.Soc.17(1967), 139-156.
〔8〕 R.Engelking, General Topology, Warsyawa, 1977.
〔9〕 E.Marczewski and R.Sikorski, Measures in non-separable metric spaces, Collog.Math., I, 133-149.

第七章　Suslin假设的独立性

Suslin假设是由于刻划实数轴$\langle R,<\rangle$的性质而引起的．我们先介绍一些概念．

设X为一拓扑空间．如果X中任一族互不相交的非空开集其个数都可数，则称X适合**可数链条件**（简记为c.c.c.）．

设$\langle X,<\rangle$为一全序集．则可利用$<$仿照实数轴的情况在X中定义开区间及开集概念，使X成为一拓扑空间．此种拓扑结构称为X的**序拓扑**．

设$\langle X,<\rangle$为一全序集．如果X在其序拓扑之下适合c.c.c.并且X不是可分的（即：在X中不存在可数稠密子集），则称$\langle X,<\rangle$为一条**Suslin线**．

Suslin假设（简记为SH）是说：不存在Suslin线．

习知，如果一个全序集$\langle X,<\rangle$适合下列三条件：

（a）X没有最小元，也没有最大元．

（b）X在序拓扑之下是连通的．

（c）X在序拓扑之下是可分的．

则$\langle X,<\rangle$同构于$\langle R,<\rangle$．M.Suslin曾考虑（见[1]）：上述条件（c）能否换为

（c'）X在序拓扑之下是c.c.c.的．

易知，在Suslin假设之下，(c)和(c')是等价的（因易证若X可分，则X适合c.c.c.）．但若存在Suslin线，则可证也存在适合（a）及（b）的Suslin线，从而后者适合（a），（b），（c'）且不与$\langle R,<\rangle$同构．所以，Suslin假设等价于：用(a)，(b)，(c')可以刻划实数轴$\langle R,<\rangle$．

本章介绍Suslin假设及一些相关问题对于ZFC的相对独立性。

§1 由$MA(\omega_1)$证SH

引理1 在$MA(\omega_1)$之下，设X为一c.c.c.拓扑空间，$\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$为$X$中一族非空开集，则存在$\omega_1$的不可数子集$A$能使$\{U_\alpha:\alpha\in A\}$中任意有限个开集的交都不空。

证明 对每个$\alpha<\omega_1$，令$V_\alpha=\bigcup_{\alpha<\gamma<\omega_1}U_\gamma$.则当$\alpha<\beta$时有$V_\beta\subseteq V_\alpha$。现在证明，存在一$\alpha<\omega_1$能使

（$*$） 对一切$\alpha<\beta<\omega_1$，$\bar{V}_\beta=\bar{V}_\alpha$.（$\bar{V}$为$V$的闭包）。

假若不存在这样的α，则由ω_1为正则（regular）基数易知，存在一系列序数

$$\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_\xi<\cdots,(\xi<\omega_1)$$

使得对每个ξ都有$\bar{V}_{\alpha_{\xi+1}}\neq\bar{V}_{\alpha_\xi}$，从而

$$W_\xi=(V_{\alpha_\xi}\setminus\bar{V}_{\alpha_{\xi+1}})\neq 0,(\xi<\omega_1).$$

（因：否则有$V_{\alpha_\xi}\subseteq\bar{V}_{\alpha_{\xi+1}}$，从而$\bar{V}_{\alpha_\xi}\subseteq\bar{V}_{\alpha_{\xi+1}}$.但又有$\bar{V}_{\alpha_{\xi+1}}\subseteq\bar{V}_{\alpha_\xi}$，与上矛盾.）这样，$\{W_\xi:\xi<\omega_1\}$是不可数多个非空开集，且易见其互不相交，与$X$适合c.c.c.矛盾.所以，存在$\alpha$适合（$*$）.

任意取定一个适合（$*$）的α_1，令

$$P=\{p\subseteq V_{\alpha_1}:p\text{为非空开集}\},$$

并在P中定义$\leqslant$为

$$p\leqslant q\text{当且只当}p\subseteq q,$$

则P对$\leqslant$成为偏序集。易见在P中，$p\perp q$当且只当p与q不相交.所以，由拓扑空间X适合c.c.c.可知偏序集P也适合c.c.c.,

对每一$\beta<\omega_1$，令

$$D_\beta=\{p\in P:\text{存在}\gamma>\beta\text{能使}p\subseteq U_\gamma\},$$

现在证明，每一D_β都是偏序集P的稠密子集：首先，由α_1适合（*）易知，无论β大小如何，都有$\overline{V}_{\alpha_1}\subseteq\overline{V}_\beta$。现在任取$p\in P$，则有$0\neq p\subseteq V_{\alpha_1}\subseteq\overline{V}_\beta$。从而由$p$为开集易知$p\cap V_\beta\neq 0$。（因：否则$V_\beta\subseteq X\setminus p$，从而$\overline{V}_\beta\subseteq X\setminus p$，与上矛盾。）再由$V_\beta$定义知存在$\gamma>\beta$能使$p\cap U_\gamma\neq 0$。令$p_1=p\cap U_\gamma$，则$P_1\in D_\beta$并且$p_1\leqslant p$。

由$MA(\omega_1)$可知，存在P中的滤子G能使每个$G\cap D_\beta(\beta<\omega_1)$都不空。令

$$A=\{\gamma<\omega_1: \text{存在} p\in G \text{能使} p\subseteq U_\gamma\}.$$

现在证明，A在ω_1中无界：任取$\beta<\omega_1$，由$G\cap D_\beta\neq 0$知存在$p_1\in G\cap D_\beta$，再由D_β定义知存在$\gamma>\beta$能使$p_1\subseteq U_\gamma$，从而$\gamma\in A$。

由A在ω_1中无界及ω_1的正则性可知A为ω_1的不可数子集。考虑$\{U_\gamma:\gamma\in A\}$。任取其中有限个元$U_{\gamma_1},\cdots,U_{\gamma_n}$。由$A$的定义知存在$p_1,\cdots,p_n\in G$能使$p_i\subseteq U_{\gamma_i}(i=1,\cdots,n)$。再由$G$为$P$中滤子可知存在$p\in P$能使$p\leqslant p_i(i=1,\cdots,n)$，也即$p\subseteq p_i(i=1,\cdots,n)$。故由$p\neq 0$即知$U_{\gamma_1}\cap\cdots\cap U_{\gamma_n}\neq 0$。 证毕

引理2 在$MA(\omega_1)$之下，任何两个c.c.c.拓扑空间X,Y的积空间$X\times Y$仍为c.c.c.的。

证明 假若不然，则在$X\times Y$中存在一族（ω_1个）互不相交的非空开集$\{W_\alpha:\alpha<\omega_1\}$。对每个$\alpha<\omega_1$，由积空间定义知存在$X$，$Y$的非空开集$U_\alpha$，$V_\alpha$能使$U_\alpha\times V_\alpha\subseteq W_\alpha$。由引理1知，存在$\omega_1$的不可数子集$A$能使$\{U_\alpha:\alpha\in A\}$中任意有限个开集的交都不空。

对A中任二不同的元α,β，由上段知$U_\alpha\cap U_\beta\neq 0$。但

$$(U_\alpha\times V_\alpha)\cap(U_\beta\times V_\beta)\subseteq W_\alpha\cap W_\beta=0,$$

故必$V_\alpha\cap V_\beta=0$。所以$\{V_\alpha:\alpha\in A\}$是Y中不可数多个互不相交的非空开集，这与Y适合c.c.c.矛盾。 证毕

引理3 若X为一Suslin线，则积空间X^2不是c.c.c的。

证明 （1）首先，对每个$\alpha<\omega_1$，归纳地选取$a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\in X$使适合下列三条件（其中$(x,y)$代表开区间）：

(Ⅰ) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$.

(Ⅱ) $(a_\alpha, b_\alpha) \neq 0$且$(b_\alpha, c_\alpha) \neq 0$.

(Ⅲ) $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\xi : \xi < \alpha\} = 0$.

为此，先令W为X中一切孤立点所成的集。易知X中每一孤立点都是一个开集，故由X适合c.c.c.知$|W| \leqslant \omega$。

对任一$\alpha < \omega_1$，设对一切$\xi < \alpha$都已经选取了a_ξ, b_ξ, c_ξ使适合（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）.由于X不是可分的，所以可数集$S = W \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\}$在$X$中不稠密，从而开集$X \setminus \bar{S}$不空，所以存在一非空开区间$(a_\alpha, c_\alpha) \subseteq X \setminus \bar{S}$。由此知$(a_\alpha, c_\alpha)$不含孤立点，故必为无限集，从而存在$b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$能使$(a_\alpha, b_\alpha) \neq 0$且$(b_\alpha, c_\alpha) \neq 0$。所以，$a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$适合（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）。

（2）对每个$\alpha < \omega_1$，定义X^2中的开集$U_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$。由（Ⅱ）知$U_\alpha \neq 0$。现在证明，对每个$\xi < \alpha$，都有$U_\xi \cap U_\alpha = 0$。由（Ⅲ）可知，或$b_\xi \leqslant a_\alpha$，或$b_\xi \geqslant c_\alpha$。在前一情况，有$(a_\xi, b_\xi) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = 0$，从而$U_\xi \cap U_\alpha = 0$。在后一情况，有$(b_\xi, c_\xi) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = 0$，从而$U_\xi \cap U_\alpha = 0$。

由上可知，$\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是$X^2$中的不可数多个互不相交的非空开集，所以$X^2$不适合c.c.c.　　证毕

定理4　在$MA(\omega_1)$之下，不存在Suslin线，即SH成立。

证明　假若存在Suslin线X，则由引理2知X^2是c.c.c.的，这与引理3矛盾。　　证毕

§2　Suslin树

定义　设$\langle T, \leqslant \rangle$为一偏序集，如果对每个$x \in T$，子集$\{y \in T : y < x\}$都是良序集，则称$\langle T, \leqslant \rangle$为一**树**（一般简记为$T$）。

定义　设$\langle T, \leqslant \rangle$为一树。

（a）若$x \in T$，称良序集$\{y \in T : y < x\}$的序型α为x在树T中

的**高度**，记为$\mathrm{ht}(x,T)$。

（b）对每一序数α，称$\{x\in T: \mathrm{ht}(x,T)=\alpha\}$为树$T$的**第$\alpha$层**，记为$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$。

（c）适合$\mathrm{Lev}_\alpha(T)=0$的最小序数α称为树T的**高度**，记为$\mathrm{ht}(T)$。

（d）设T'是T的子集。易见T'对于由T的偏序在T'上导出的偏序（仍记为$\leqslant$）也构成一树。如果T'又适合：

对每一$x\in T'$及每一$y\in T$，若$y<x$则$y\in T'$。

则称树T'（即$\langle T',\leqslant\rangle$）为树$T$的**子树**.

定义 设$\langle T,\leqslant\rangle$为一树．若$T$的子集$C$对于$\leqslant$构成全序集，则称$C$为树$T$中的一个**链**。若$T$的子集$A$适合下列条件：

对任何$x,y\in A$，若$x\neq y$则“$x\nleqslant y$且$y\nleqslant x$”。

则称A为树T中的一个**反链**。

定义 设$\langle T,\leqslant\rangle$为一树．若$|T|=\omega_1$并且$T$中每一链及每一反链都可数，则称$T$为一**Suslin树**。

定义 设T为一Suslin树．若T适合$|\mathrm{Lev}_0(T)|=1$及下列条件：

（$*_1$）　对每个$x\in T$及每个适合$\mathrm{ht}(x,T)<\alpha<\omega_1$的序数$\alpha$，都存在$y\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$能使$x\leqslant_T y$。（$\leqslant_T$为树$T$的偏序关系）

则称T为**修剪良好**的。

引理5 若T为一Suslin树，则T含有一个修剪良好的子Suslin树T_1。

证明 令$Z_0=T\setminus\mathrm{Lev}_0(T)$。由$|T|=\omega_1$及$|\mathrm{Lev}_0(T)|<\omega_1$知$|Z_0|=\omega_1$。但$Z_0$中每一元都高于（在$\leqslant_T$意义下）$\mathrm{Lev}_0(T)$中某一元，故知存在$x_0\in\mathrm{Lev}_0(T)$能使$|\{z\in Z_0: x_0\leqslant_T z\}|=\omega_1$。

令　$T_1=\{x\in T: x_0\leqslant_T x且|\{z\in T: x\leqslant_T z\}|=\omega_1\}$。

易见T_1是T的子树且$|\mathrm{Lev}_0(T_1)|=|\{x_0\}|=1$。

现在证T_1适合($*_1$)：任取$x\in T_1$。由T_1为T的子树易知$\mathrm{ht}(x,$

$T_1) = \mathrm{ht}(x,T)$。再任取适合$\mathrm{ht}(x,T) < \alpha < \omega_1$的序数$\alpha$。令

$$Z = \{z \in T : x \leqslant_T z \text{且} \alpha < \mathrm{ht}(z,T)\}.$$

由T为Suslin树易知对每个序数β都有$|\mathrm{Lev}_\beta(T)| < \omega_1$，再由$x \in T_1$及$T_1$定义及$\alpha < \omega_1$可知$|Z| = \omega_1$。再令

$$Y = \{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) : x \leqslant_T y\},$$

则易见Z中每一元都高于（在$\leqslant_T$意义下）Y中每一元。但$|Y| < \omega_1$，故易见存在$y_1 \in Y$能使$|\{z \in Z : y_1 \leqslant_T z\}| = \omega_1$，从而易见$y_1 \in T_1$。所以$y_1 \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \cap T_1 = \mathrm{Lev}_\alpha(T_1)$且由$y_1 \in Y$有$x \leqslant_{T_1} y$。

由T_1适合$(*_1)$可知$|T_1| = \omega_1$。从而易见T_1是Suslin树，并且是修剪良好的。 证毕

定理6 若$MA(\omega_1)$成立，则不存在Suslin树。

证明 假若存在Suslin树，则由引理5知也存在修剪良好的Suslin树。设$\langle T, \leqslant_T \rangle$是一个这样的树。

令取$\leqslant_T$的逆关系$\leqslant$作偏序集$P = \langle T, \leqslant \rangle$（即：对任何$x$，$y \in T$，令$x \leqslant y$当且只当$y \leqslant_T x$。）。由于树$\langle T, \leqslant_T \rangle$中每一反链都可数，故知$P$中也如此，即偏序集$P$适合c.c.c.。

对任一序数$\alpha < \omega_1$，令$D_\alpha = \{x \in T : \mathrm{ht}(x,T) \geqslant \alpha\}$。

考虑T中任一元y。若$\mathrm{ht}(y,T) \geqslant \alpha$，则$y \in D_\alpha$。若$\mathrm{ht}(y,T) < \alpha$，则由$\langle T, \leqslant_T \rangle$为修剪良好的可知存在$x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \subseteq D_\alpha$能使$y \leqslant_T x$。

把上段论证放到P中来看，这正是说明：D_α是P的稠密子集。（对每一$\alpha < \omega_1$）。故由$MA(\omega_1)$可知，存在P的滤子G能与每个D_α都相交。再由诸D_α定义易知G为不可数。

又由于P的偏序为$\leqslant_T$的逆关系，故由G的滤子性质及$\leqslant_T$的树性质易证G是树$\langle T, \leqslant_T \rangle$中的链。但由$\langle T, \leqslant_T \rangle$为Suslin树知它不含有不可数链，故得矛盾。 证毕

本节以下将证明：若存在Suslin树，则也存在Suslin线。这一事实在下节有用。另外，由这一事实及§1的定理4，也可得出

定理6。

引理7 若T为一修剪良好的Suslin树且$x\in T$，则：对每一自然数n，都存在$\alpha>\mathrm{ht}(x,T)$能使$|\{y\in \mathrm{Lev}_\alpha(T): x\leqslant_T y\}|\geqslant n$。

证明 （1）令$X=\{y\in T: x\leqslant_T y\}$。由性质$(*_1)$易知$|X|=\omega_1$，从而由$T$为Suslin树可知$X$不是一个链。所以引理对$n=2$为真。

（2）设$n=k$时引理已真。当$n=k+1$时：由归纳假设知存在$\alpha_1>\mathrm{ht}(x,T)$及$\mathrm{Lev}_{\alpha_1}(T)$中$k$个不同的元$y_1,\cdots,y_k$适合$x\leqslant_T y_i$ $(i=1,\cdots,k)$。现在对y_k应用$n=2$时的引理，可知存在$\alpha>\alpha_1$及$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$中两个不同元z_k,z_{k+1}适合$y_k\leqslant_T z_k,z_{k+1}$。另外，由$(*_1)$知在$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$中也存在$z_1,\cdots,z_{k-1}$适合$y_i\leqslant_T z_i(i=1,\cdots,k-1)$。从而有$x\leqslant z_i(i=1,\cdots,k,k+1)$。所以引理对$n=k+1$也成立也。证毕

定理8 若存在Suslin树，则存在Suslin线。

证明 （1）设T_0为一Suslin树。由引理5知T_0含有一个修剪良好的子Suslin树T。

（2）令$L=\{C\subseteq T: C$为T中的极大链$\}$。

对每一$C\in L$，易见存在唯一的序数$h(C)$能使：当$\alpha<h(C)$时，C与$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$恰有一个公共元（以下记为$C(\alpha)$）；当$\alpha\geqslant h(C)$时，C与$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$不相交。

对每一$C\in L$，由T为Suslin树可知$h(C)<\omega_1$。又因T为修剪良好的，易见C中无最大元，从而可知$h(C)$为极限序数。

现在在L中定义一个全序关系$\lhd$如下。首先，在集合T中任意定义一个全序关系$\prec$（它与树T中原有的偏序无关）。对L中任二不同的元C，D，令$d(C,D)$为适合$C(\alpha)\neq D(\alpha)$的最小序数α。由C,D是不同的极大链易知$d(C,D)<\min(h(C),\ h(D))$，从而$C(d(C,D))$及$D(d(C,D))$都有意义。现在令

$$C\lhd D\text{当且只当}C(d(C,D))\prec D(d(C,D))。$$

这是利用$\prec$在L中定义的一种字典顺序，因而易见$\lhd$是L中的一

个全序关系，以下将证明：$\langle L,\lhd\rangle$是一条Suslin线。

（3）先证明$\langle L,\lhd\rangle$适合可数反链条件。假若在$\langle L,\lhd\rangle$中存在ω_1个两两不相交的非空开区间$\{(C_\xi,D_\xi):\xi<\omega_1\}$。对每个$\xi<\omega_1$，任取一$E_\xi\in(C_\xi,D_\xi)$，并取一序数$\alpha_\xi$使适合

$$\max(d(C_\xi,E_\xi),d(E_\xi,D_\xi))<\alpha_\xi<h(E_\xi),$$

（由（2）中的$d(C,D)<\min(h(C),h(D))$及$h(E_\xi)$为极限序数易见α_ξ存在。）

现在证明，$\{E_\xi(\alpha_\xi):\xi<\omega_1\}$构成树$T$中一个不可数的反链，从而与$T$为Suslin树矛盾。

例如，看$E_0(\alpha_0)$与$E_1(\alpha_1)$。假若它们在T中可比，不妨设

$$E_0(\alpha_0)\leqslant_T E_1(\alpha_1),\ （\leqslant_T\text{为树}T\text{的偏序关系}）$$

则由E_0，E_1均为树T的极大链易知$\alpha_0\leqslant\alpha_1$，并且有

$$E_0(0)=E_1(0),E_0(1)=E_1(1),\cdots,E_0(\alpha_0)=E_1(\alpha_0)$$

但$\alpha_0>d(C_0,E_0),d(E_0,D_0)$，所以由$d$的定义及上列诸式易见有

$$d(C_0,E_0)=(\text{使}C_0(\alpha)\neq E_0(\alpha)\text{的最小}\alpha)$$
$$=(\text{使}C_0(\alpha)\neq E_1(\alpha)\text{的最小}\alpha)=d(C_0,E_1);$$

及
$$d(E_0,D_0)=d(E_1,D_0).$$

由此及$C_0\lhd E_0\lhd D_0$及$E_0(0)=E_1(0),\cdots,E_0(\alpha_0)=E_1(\alpha_0)$可得

$$C_0(d(C_0,E_1))=C_0(d(C_0,E_0))$$
$$\prec E_0(d(C_0,E_0))=E_1(d(C_0,E_0))=E_1(d(C_0,E_1));$$

及
$$E_1(d(E_1,D_0))=D_0(d(E_1,D_0)).$$

从而有$C_0\lhd E_1\lhd D_0$，即$E_1\in(C_0,D_0)$。但由E_1取法知$E_1\in(C_1,D_1)$。这与(C_0,D_0)与(C_1,D_1)不相交的题设矛盾。

（4）再证$\langle L,\lhd\rangle$不可分，即：不含可数稠密子集。

为此，只须证明：对每一$\delta<\omega_1$，$\langle L,\lhd\rangle$的子集$S_\delta=\{C:h(C)<\delta\}$在$\langle L,\lhd\rangle$中不稠密（因：若$S$为$\langle L,\lhd\rangle$的可数子集，则由于对每个$D\in S$都有$h(D)<\omega_1$及$S$可数以及$\omega_1$为正则基数易知存在$\delta_1<\omega_1$能使$S\subseteq S_{\delta_1}$，从而由$S_{\delta_1}$不稠密即知$S$不稠密。）。

考虑任一$S_\delta(\delta<\omega_1)$。任取一个$x\in\mathrm{Lev}_\delta(T)$.由引理7知，存在一$\alpha>\delta$使$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$中含有3个（在$\leqslant_T$下）大于$x$的不同的元$y,z,w$。任取L中3个分别包含$y,z,w$的元$D,E,F$。易见$D,E,F$也互不相同，不妨设$D\lhd E\lhd F$，则$(D,F)$是$\langle L,\lhd\rangle$中的非空开区间.以下证明$S_\delta$与$(D,F)$不相交（从而即知$S_\delta$不稠密）。

任取$G\in(D,F)$，现在证明$x\in G$（从而$h(G)\geqslant\delta$，$G\notin S_\delta$）。令

$\delta_1=d(D,F)$，$\delta_2=d(D,G)$，$\delta_3=d(G,F)$，$\delta'=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$。再分情况讨论：

(4·1) 若$\delta'=\delta_1$，则$\delta_1\leqslant\delta_2$。但由$D,F$取法及树性质易见$x\in D\cap F$，再由$x\in\mathrm{Lev}_\delta(T)$易知$\delta<\delta_1$。所以$\delta<\delta_2$，从而$G(\delta)=D(\delta)=x$，$x\in G$。

(4·2) 若$\delta'=\delta_2<\delta_3$，则由$\delta_2,\delta_3$取法知$D(\delta_2)\neq G(\delta_2)=F(\delta_2)$。但易见$D(\delta)=x=F(\delta)$，所以$\delta<\delta_2$，从而仿上有$x\in G$。

(4·3) 若$\delta'=\delta_3<\delta_2$，仿(4.2)有$x\in G$。

(4·4) 若$\delta'=\delta_2=\delta_3$，则由$\delta_2,\delta_3$取法及$D\lhd G\lhd F$有$D(\delta_2)\prec G(\delta_2)\prec F(\delta_2)$，所以$D(\delta_2)\neq F(\delta_2)$。再由$D(\delta)=x=F(\delta)$可得$\delta<\delta_2$，从而仿上有$x\in G$。 证毕

注 本定理的逆命题也成立，证略。

§3 由◇证明存在Suslin树

我们先介绍集合论命题◇.

定义 设$C\subseteq\omega_1$。如果对每一极限序数$\delta<\omega_1$都有："若$C\cap\delta$在δ中无界，则$\delta\in C$"，则称C为**闭**的。如果C在ω_1中无界且为闭的，则称C为ω_1的**无界闭子集**，简记为c.u.b.集。

定义 设$S\subseteq\omega_1$。如果S与ω_1的每个无界闭子集的交集都不空，则称S为ω_1的**平稳子集**（可以证明，这一定义与第一章中

平稳子集的定义是等价的.)。

命题◇ 存在集合序列$\langle A_\alpha : \alpha<\omega_1\rangle$(其中每个$A_\alpha\subseteq\alpha$)能使:

对每一$A\subseteq\omega_1$,集合$\{\alpha<\omega_1 : A\cap\alpha=A_\alpha\}$都是$\omega_1$的平稳子集。

(以下把具有这样性质的序列$\langle A_\alpha : \alpha<\omega_1\rangle$称为◇-**序列**.)

可以证明:如果ZFC不矛盾,则ZFC+◇也不矛盾(证略,读者可参看公理集合论专书,如〔5〕、〔6〕等.)。

以下回到对Suslin树的讨论.

定义 设$\langle T,\leqslant\rangle$为一树.若$\mathrm{ht}(T)=\omega_1$并且对每一$\alpha<\omega_1$都有$|\mathrm{Lev}_\alpha(T)|<\omega_1$,则称$T$为一$\omega_1$-**树**.

定义 设$\langle T,\leqslant\rangle$为一树.如果对每个$x\in T$,集合$\{y\in T : x\leqslant y\}$都不是$T$中的链,则称树$T$为**永远分枝的**.

引理9 设$\langle T,\leqslant\rangle$为一永远分枝的$\omega_1$-树.如果$T$中每个反链都是可数的,则$T$为一Suslin树.

证明 首先,由T为ω_1-树易知$|T|=\omega_1$.

以下证明T中每个链都可数.

假如T中有一个不可数的链B,不妨设B为极大链,则由$\mathrm{ht}(T)=\omega_1$易见B与T的每一层都相交.又由于T是永远分枝的,所以对每个$x\in T$,都能找到一个$f(x)\in T$使$x\leqslant f(x)$并且$f(x)\notin B$.

现在,对每个$\alpha<\omega_1$,归纳地选取$x_\alpha\in B$使适合

$$\mathrm{ht}(x_\alpha,T)>\sup\{\mathrm{ht}(f(x_\beta),T) : \beta<\alpha\}.$$

以下说明x_α的存在性:设对每一$\beta<\alpha$都已定义了$x_\beta\in B$.由T为ω_1-树可知每个$\mathrm{ht}(f(x_\beta),T)<\omega_1$,再由$\beta$的个数为$|\alpha|<\omega_1$及$\omega_1$的正则性可知

$$\sup\{\mathrm{ht}(f(x_\beta),T) : \beta<\alpha\}<\omega_1,$$

所以存在序数α_1能适合

$$\sup\{\mathrm{ht}(f(x_\beta),T) : \beta<\alpha\}<\alpha_1<\omega_1.$$

又由$\mathrm{ht}(T)=\omega_1$可知$\mathrm{Lev}_{\alpha_1}(T)\neq 0$,故由前述$B$的性质可知$B$与

$\mathrm{Lev}_{\alpha_1}(T)$相交，此交点即可充当$x_\alpha$。

现在证明$\{f(x_\alpha):\alpha<\omega_1\}$是$T$中的不可数反链（从而与题设矛盾）。

对任何$\beta<\alpha<\omega_1$，由x_α取法可知

$$\mathrm{ht}(f(x_\beta),T)<\mathrm{ht}(x_\alpha,T).$$

再由$x_\alpha\leqslant f(x_\alpha)$易见有

$$\mathrm{ht}(f(x_\beta),T)<\mathrm{ht}(f(x_\alpha),T).$$

假若$f(x_\beta)$与$f(x_\alpha)$可比，则由上式知必是$f(x_\beta)\leqslant f(x_\alpha)$，从而有

$$x_\beta\leqslant f(x_\beta)\leqslant f(x_\alpha) \quad 及 \quad x_\beta\leqslant x_\alpha\leqslant f(x_\alpha),$$

再由树的定义知$f(x_\beta)$与x_α可比。但这不可能，因：（Ⅰ）若$x_\alpha\leqslant f(x_\beta)$，则有

$$\mathrm{ht}(x_\alpha,T)\leqslant\mathrm{ht}(f(x_\beta),T),$$

这与以上矛盾。（Ⅱ）若$f(x_\beta)<x_\alpha$，则由$x_\beta\leqslant f(x_\beta)<x_\alpha$及$x_\beta$，$x_\alpha\in B$及链$B$的极大性应有$f(x_\beta)\in B$，与$f(x_\beta)$取法不合。

所以，对任何$\beta<\alpha<\omega_1$，$f(x_\beta)$与$f(x_\alpha)$都不可比。从而$\{f(x_\alpha):\alpha<\omega_1\}$是$T$中的不可数反链，这与题设矛盾。

所以，T中每个链都可数。再由$|T|=\omega_1$及题设即知T为一Suslin树。 证毕

引理10 设$\mathscr{A}$为ω_1上的一族有限元函数，其个数小于ω_1。令

$$C=\{\gamma<\omega_1:\gamma(视为\omega_1的子集)对\mathscr{A}中函数都封闭\},$$

则C是ω_1中的c.u.b.集。

证明 （1）先证C是ω_1的闭子集。任取极限序数$\delta<\omega_1$。若$C\cap\delta$在δ中无界，以下证明δ对$\mathscr{A}$中函数都封闭，从而$\delta\in C$。

任取$\mathscr{A}$中一函数f，设它是m元的。任取$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\delta$。由$C\cap\delta$无界可知存在$\gamma\in C\cap\delta$能使$\alpha_1,\cdots,\alpha_m<\gamma$，也即$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\gamma$。故由$\gamma\in C$知$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\gamma$，再由$\gamma\in\delta$即知$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\delta$。

（2）再证C在ω_1中无界。任取$\xi\in\omega_1$，令$G(\xi)$为集合ξ在$\mathscr{A}$

的诸函数下的闭包（即由ξ中元素经$\mathscr{A}$中函数所生成的集合），则有$\xi \subseteq G(\xi) \subsetneq \omega_1$，并且由$|\xi| < \omega_1$及$\mathscr{A}$中函数都是有限元的易知$|G(\xi)| < \omega_1$。由于$\omega_1$是正则基数，故知存在序数$g(\xi)$能适合$\xi < g(\xi) < \omega_1$及$G(\xi) \subseteq g(\xi)$。

把g看作定义在ω_1上的函数。对于ξ，反复作$g(\xi)$，$g^2(\xi)$（即$g(g(\xi))$，以下仿此），$g^3(\xi)$，…，并令

$$g^{\omega}(\xi) = \sup\{g^n(\xi) : n \in \omega\}.$$

显然有$\xi < g^{\omega}(\xi)$，以下证明$g^{\omega}(\xi) \in C$，从而即知C在ω_1中无界。

首先，由诸$g^n(\xi) < \omega_1$及ω_1的正则性可知$g^{\omega}(\xi) < \omega_1$。再证明$g^{\omega}(\xi)$对$\mathscr{A}$中诸函数都封闭。任取$\mathscr{A}$中一个函数$f$（设为$m$元的），并任取$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in g^{\omega}(\xi)$。易见存在$k \in \omega$能使$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in g^k(\xi)$，从而

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in G(g^k(\xi)) \subseteq g^{k+1}(\xi) \subseteq g^{\omega}(\xi).$$

所以，$g^{\omega}(\xi)$对$\mathscr{A}$中函数都封闭。由以上即知$g^{\omega}(\xi) \in C$。　证毕

引理11　设$T = \langle \omega_1, \lhd \rangle$为一$\omega_1$-树，$A \subseteq \omega_1$为$T$中一个极大反链，则$C = \{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha$且$A \cap T_\alpha$为$T_\alpha$中的极大反链$\}$为$\omega_1$中的c.u.b.集。（其中$T_\alpha = \bigcup \{\mathrm{Lev}_\beta(T) : \beta < \alpha\}$。）

证明　（1）先证C为ω_1的闭子集。任取一极限序数$\delta < \omega_1$。设$C \cap \delta$在δ中无界，现在证$\delta \in C$。

（1·1）任取$\beta < \delta$。由$C \cap \delta$在δ中无界可知存在$\gamma \in C \cap \delta$使$\beta < \gamma$。故有$T_\beta \subseteq T_\gamma = \gamma \subseteq \delta$。又由$\delta$为极限序数易知$T_\delta = \bigcup_{\beta < \delta} T_\beta$。从而有$T_\delta \subseteq \delta$。

（1·2）任取$\beta < \delta$。仿上知存在$\gamma \in C \cap \delta$使$\beta < \gamma$。故有$\beta \subseteq \gamma = T_\gamma \subseteq T_\delta$。又由$\delta$为极限序数知$\delta = \bigcup_{\beta < \delta} \beta$。从而有$\delta \subseteq T_\delta$。

（1·3）由A为T中反链知$A \cap T_\delta$为T_δ中的反链。

（1·4）假若存在$\xi \in T_\delta$与$A \cap T_\delta$中诸元都不可比。则存在$\beta < \delta$使$\xi \in T_\beta$。又仿上知存在$\gamma \in C \cap \delta$使$\beta < \gamma$，故有$\xi \in T_\gamma$。再由$\gamma \in C$可知ξ与$A \cap T_\gamma$中某元可比。但显见$A \cap T_\gamma \subseteq A \cap T_\delta$，这与$\xi$

的取法矛盾。

由 (1·1) 至 (1·4) 即知$\delta\in C$。

（2）再证C在ω_1中无界。在ω_1上定义函数f,g,h如下。对任何$\xi\in\omega_1$，令

$$f(\xi)=\mathrm{ht}(\xi,T).$$

$$g(\xi)=\sup\{\eta:\eta\in\mathrm{Lev}_\xi(T)\}.$$

$$h(\xi)=A\text{中与}\xi\text{在}T\text{中可比的唯一元素}.$$

令　$D=\{\alpha<\omega_1:\alpha\text{对}f,g,h\text{封闭}\}$。

则由引理10知D为ω_1的c.u.b.集。以下证明$D\subseteq C$，从而即知C在ω_1中无界。

任取$\alpha\in D$。则α对f,g,h封闭。

(2·1) 对任何$\xi\in\alpha$，有$\mathrm{ht}(\xi,T)=f(\xi)\in\alpha$，从而$\xi\in T_\alpha$。所以$\alpha\subseteq T_\alpha$。

(2·2) 对任何$\xi\in T_\alpha$，存在$\beta<\alpha$使$\xi\in\mathrm{Lev}_\beta(T)$，从而有$\xi\leqslant g(\beta)$。但由$\beta\in\alpha$有$g(\beta)\in\alpha$，从而易见$\xi\in\alpha$。所以$T_\alpha\subseteq\alpha$。

(2·3) 由A为T中反链知$A\cap T_\alpha$为T_α中的反链。

(2·4) 任取$\xi\in T_\alpha$。由 (2·2) 知$\xi\in\alpha$，所以$h(\xi)\in A$且与ξ可比。又有$h(\xi)\in\alpha$，再由 (2·1) 有$h(\xi)\in T_\alpha$。所以$h(\xi)\in A\cap T_\alpha$。

由 (2·1)至 (2·4) 即知$\alpha\in C$。　　　　证毕

引理12　设$T=\langle\omega_1,\leqslant_T\rangle$是一个永远分枝的$\omega_1$-树，$\langle A_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$是一个◇-序列。如果对每个极限序数$\alpha<\omega_1$都有下列性质$(\pi)$成立：

(π)　若$T_\alpha=\alpha$并且A_α在$\leqslant_T$下是T_α中的一个极大反链，
　　则对每个$x\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$都存在$y\in A_\alpha$能使$y<_T x$。

则T为一ω_1-Suslin树。

证明　由引理9易知，只须证明T的每一反链都为可数。

任取T中一反链A_0，易见T_0可扩张为T的一个极大反链A。

由引理11知

$$C_1=\{\alpha<\omega_1: T_\alpha=\alpha\text{且}A\cap T_\alpha\text{为}T_\alpha\text{中的极大反链}\}$$

为ω_1中的c.u.b.集。又易知

$$C_2=\{\alpha<\omega_1:\alpha\text{为极限序数}\}$$

是ω_1中的c.u.b.集，并且易证两个c·u·b集的交仍是c·u·b.集，所以

$$C=\{\alpha<\omega_1:\alpha\text{为极限序数},T_\alpha=\alpha\text{并且}A\cap T_\alpha\text{为}T_\alpha\text{中的极大反链}\}$$

是ω_1中的c.u.b.集。但由◇-序列定义知

$$S=\{\alpha<\omega_1: A\cap\alpha=A_\alpha\}$$

是ω_1的平稳子集，从而$S\cap C$不空。故可取定一$\beta\in C$使$A\cap\beta=A_\beta$。

对于T中任一适合$\mathrm{ht}(z,T)\geqslant\beta$的元$z$，易见存在一个$x\in \mathrm{Lev}_\beta(T)$能使$x\leqslant_T z$。又由$\beta\in C$及（$\pi$）可知，对于此$x$，存在$y\in A_\beta=A\cap\beta$能使$y<_T x$，从而$y<_T z$。再由$A$为反链及$y\in A$即知$z\notin A$。

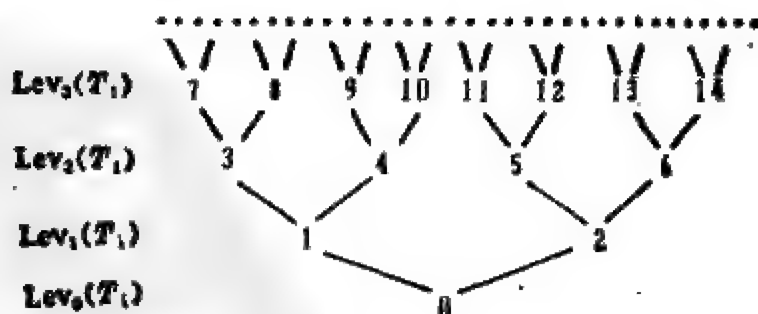
由上段可知$A\subseteq T_\beta$。但$T_\beta=\beta$（因$\beta\in C$），所以$A\subseteq\beta$。再由$\beta<\omega_1$即知A为可数，从而A_0也可数。　　证毕

定理13　若◇成立，则存在Suslin树。

证明　任意取定一个◇-序列$\langle A_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$。

我们取序数集ω_1，在ω_1上定义一个偏序$\lhd_1$，使$T_1=\langle\omega_1,\lhd_1\rangle$成为一个Suslin树。

（1）T_1的第$0,1,\cdots,n,\cdots\cdots$各层（$n<\omega$）如下定义：



（2）T_1的第ω层如下定义：

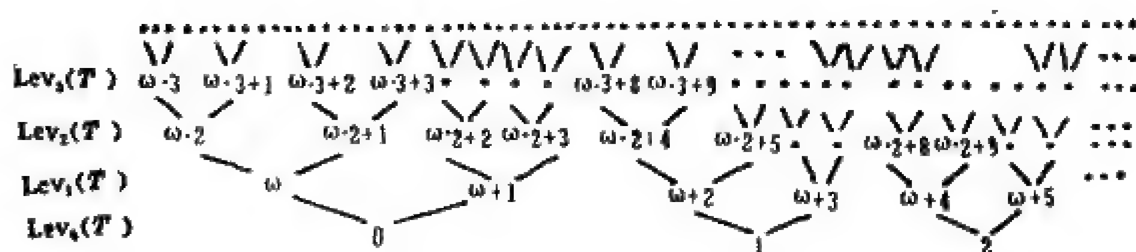
取序数$\omega, \omega+1, \cdots, \omega+n, \cdots (n<\omega)$作为第$\omega$层的点。这些点与以前各层的点间的偏序$\lhd_1$定义如下：

对每一$m<\omega$，通过上图中的点m，任意选定一条通向第ω层的极大链(即与第$0,1,\cdots,n,\cdots$各层都相交的链）$C(m)$(例如，可以取$C(0)$为$\{0, 1, 3, 7, \cdots\}$；可以取$C(3)$为$\{0, 1, 3, 8, 17, \cdots\}$，但也可以取$C(3)=C(0)$；等等)。并令(对任何$l, m<\omega$)

$$l \Delta_1 \omega+m \text{当且只当} l \in C(m)。$$

（3）为了便于描述T_1的第ω层以上的状况，我们先另外定义一个树$T=\langle\omega_1, \lhd\rangle$，然后把它依自然方式接在$T_1$的第$\omega$层之上(事实上，我们将证明$T$自身就是一个Suslin树。只不过它的第0层有无限多元，不如T_1看起来更自然些。)。

T的第$0,1,\cdots,n,\cdots$各层（$n<\omega$）如下定义：



一般，我们对T的偏序$\lhd$按其各层作归纳定义，使适合下列4条件：(其中$I_\beta=\{\omega\cdot\beta+n: n<\omega\}$。)

(a_1) $\lhd$是ω_1上的树偏序并且对每个$\beta<\omega_1$都有$\mathrm{Lev}_\beta(T)=I_\beta$。

(a_2) 对每个$\beta<\omega_1$及每个$n<\omega$，有

$$(\omega\cdot\beta+n) \lhd (\omega\cdot(\beta+1)+2n) \text{及}$$

$$(\omega\cdot\beta+n) \lhd (\omega\cdot(\beta+1)+2n+1)。$$

(a_3) 若$\beta<\alpha<\omega_1$且$x\in I_\beta$，则存在$y\in I_\alpha$能使$x\lhd y$。

(a_4) 引理12的(π)成立(对每个极限序数$\alpha<\omega_1$.)。

对任一$\alpha<\omega_1$，设在$T_\alpha=\bigcup_{\gamma<\alpha}\mathrm{Lev}_\gamma(T)$上已有$\lhd$的定义并且适合$(a_1)$至$(a_4)$。由此易知有$T_\alpha=\omega\cdot\alpha$。

以下描述如何把$\lhd$的定义扩展到$T_\alpha\cup I_\alpha$上，使I_α成为$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$。

(3·1) 当α为后继序数$\beta+1$时。对任何$x\in T_\alpha=\omega\cdot\alpha$及任何$y\in I_\alpha$，如下定义$\lhd$：

(i) 若$y=\omega\cdot\alpha+2n$，令

$x\lhd y$当且只当 $(x=\omega\cdot\beta+n$或$x\lhd\omega\cdot\beta+n)$。

(ii) 若$y=\omega\cdot\alpha+2n+1$，令

$x\lhd y$当且只当 $(x=\omega\cdot\beta+n$或$x\lhd\omega\cdot\beta+n)$。

此时易见$\lhd$仍是树偏序，并且有$\mathrm{Lev}_\alpha(T)=I_\alpha$。从而$T_{\alpha+1}=T_\alpha\cup I_\alpha=\omega\cdot(\alpha+1)$，并且$(a_1)$至$(a_4)$在$T_{\alpha+1}$上成立(注意$(a_4)$对于后继序数$\alpha$无要求.)。

(3·2) 当α为极限序数时。

(3·2·1) 若(a_4)的(π)中前提条件 ($T_\alpha=\alpha$且A_α为T_α的极大反链) 对于此α不成立。此时如下进行。

对每一$x\in T_\alpha=\omega\cdot\alpha$，在$T_\alpha$中任意取定一个通过$x$的极大链$B(x)$(即：$x\in B(x)$并且链$B(x)$与$T_\alpha$的每一层$\mathrm{Lev}_\gamma(T_\alpha)=I_\gamma$都相交.)．例如可如下选取$B(x)$：先根据$x$取一系列序数$\xi_m=\xi_m(x)$ $(m<\omega)$ 使适合

$$\mathrm{ht}(x)<\xi_0<\xi_1<\cdots\text{且}\sup\{\xi_m:\ m<\omega\}=\alpha;$$

然后在T_α中归纳地选取诸$y_m=y_m(x)\in I_{\xi_m}$使

$$x\lhd y_0\lhd y_1\lhd\cdots$$

(由(a_3)知此可能)；再令

$$B(x)=\{z\in T_\alpha:\ \text{存在}m<\omega\text{使}z\lhd y_m(x)\},$$

则易知$B(x)$是一个通过x的极大链。

现在，把$T_\alpha=\omega\cdot\alpha$中的元（由$\alpha<\omega_1$知$\omega\cdot\alpha$可数）任意排为一个序型为$\omega$的有序集$\{x_n;\ n<\omega\}$（这个排序与树$T_\alpha$中的偏序无关）。然后根据这一排序，如下定义$T_\alpha$中的元与$I_\alpha$中的元的偏序$\lhd$：

对任何$u\in T_\alpha$及$v\in I_\alpha$。设$v=\omega\cdot\alpha+n$，则

$u\lhd v$当且只当$u\in B(x_n)$。

由诸$B(x)$在T_α中的极大性可知I_α中每个元的高度为α，从而$\text{Lev}_\alpha(T)=I_\alpha$，$T_{\alpha+1}=T_\alpha\cup I_\alpha=\omega\cdot(\alpha+1)$。此外还易见$(a_1)$至$(a_4)$在$T_{\alpha+1}$上成立。

(3·2·2) 若(a_4)的(π)中前提条件对此α成立。此时基本仿(3·2·1)，只是略作修改如下。

对每一$x\in T_\alpha$，由于A_α对于$\lhd$构成树T_α的一个极大反链，所以存在一$z\in A_\alpha$能使z与x在$\lhd$下可比，从而易见存在一$y\in T_\alpha$能使$x\lhd y$且$z\lhd y$。设$\text{ht}(y)=\xi$。现在令$\xi_0=\xi$，$y_0=y$。然后再仿(3·2·1)取$\xi_1,\xi_2,\cdots$及$y_1,y_2,\cdots$并定义$B(x)$及$T_{\alpha+1}$上的$\lhd$。则对每个$x\in T_\alpha$，$B(x)$都与A_α有交点z，从而再由$\lhd$的定义即易知(π)中的结论对此α成立。

所以，此时也有(a_1)至(a_4)在$T_{\alpha+1}$上成立。

(4) 由(a_1)，(a_2)可知T是一个永远分枝的ω_1-树，再由(a_4)及引理12即知T是一个Suslin树。

(5) 把T中每个元$\alpha<\omega_1$都改记为$\omega+\alpha$，并把其第0层等同于(2)中已定义的T_1的第ω层。同时，把T的其他任何第r层都看作T_1的第$\omega+r$层。这样得到全部的树T_1。显见T_1仍是Suslin树。

证毕

§4 结　论

由定理4（以及$MA(\omega_1)$与ZFC的相对和谐性）可知SH是与

ZFC相对和谐的。由定理13及定理 8（以及命题◊与 ZFC 的相对和谐性）可知"非SH"也是与ZFC相对和谐的。这两方 面合起来，就说明了Suslin假设对于ZFC的相对独立性。

同样，把定理 6 和定理13合起来看，就说明了Suslin 树的存在性也是相对独立于ZFC的。

除了Suslin 树的存在性问题之外，在不可数树的理论中还有不少其他问题也是相对独立于ZFC的。我们只 列 举 两 个例子如下，不再详细介绍。(读者可参看〔6〕或〔7〕)

定义　设$\langle T,\leqslant\rangle$为一$\omega_1$-树。若树 T 中每一链的基数都小于ω_1，则称T为一ω_1-**Aronszajn树**。

在ZFC中可以证明，ω_1-Aronszajn 树是存在的。但若把上述定义中以及ω_1-树定义中的ω_1字样都换为ω_2，从而得到 ω_2-Aronszajn树的概念，则可以证明：ω_2-Aronszajn 树的存在性是相对独立于ZFC的。

定义　设$\langle T,\leqslant\rangle$为一$\omega_1$-树，如果$T$中的链 C 与 T 的每一层$\mathrm{Lev}_\alpha(T)(\alpha<\omega_1)$ 都相交，则称 C是T的一条**通枝** (path)。如果T至少含有ω_2条通枝，则称T为一**Kurepa树**。

Kurepa假设(KH)是说：存在Kurepa树。

可以证明：Kurepa假设也是相对独立于ZFC的。

参考文献

〔1〕M. Suslin, Problème 3, Fundamenta Mathematicae, 1(1920), 223.

〔2〕Th. J. Jech, Comment. Math. Univ. Carolinae, 8 (1967), 291-305.

〔3〕R.B.Jensen, Notices Amer. Math. Soc., 15(1968), 935.

〔4〕S. Tennenbaum, Proc. Nat. Acad. U. S. A., 59

(1968), 60-63.
〔5〕R.M.Solovay and S.Tennenbaum, Ann. of Math., 94(1971), 201-245.
〔6〕K. Kunen, Set Theory, North-Holland Publ. Co., 1980.
〔7〕Th. J. Jech, Set Theory, Academic Press, 1978.

第八章　一个数学分析问题的独立性

本章介绍一个数学分析性质的问题．它是由G．Takeuti提出的，由T．Tugué和H．Nomoto得到独立性结果（见〔1〕）．通过它可以说明，在看来似乎比较通俗，但又不是纯集合论的数学问题中，也可以出现独立于ZFC的问题．

先介绍一类命题．设A是实数集R的任意一个子集，我们要考虑的是下列命题(P_A)的真假：

(P_A)对每一自然数无限序列$\{a_k: k<\omega\}$，如果它适合

对每一实数$t\in A$，都有$\lim\limits_{k\to\infty} e^{2\pi t a_k i}=1$，

则有$\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$．

不难证明，有很多(P_A)是真的，也有很多(P_A)是假的（例如以下§1中诸结果．）．此外，更有很多(P_A)其真假尚难判断，甚至有的(P_A)其真假是不可能在ZFC中断定的．本章就是要在一些初步讨论之外说明最后一种情况的存在性．

本章是根据〔1〕改写的．

§1　(P_R)的证明及其他

以下，我们一般把序列$\{a_k: k<\omega\}$简记为$\{a_k\}$．

定理1　(P_R)为真．也即：若自然数序列$\{a_k\}$适合

$$\text{对每一实数}t\text{，都有}\lim_{k\to\infty} e^{2\pi t a_k i}=1 \qquad (\text{I})$$

则$\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$．

证明　用反证法．假设$\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$不成立（以下记此为（Ⅱ））．再分二情况讨论．

（1）若$\{a_k\}$有上界。

此时，显见由$\{a_k\}$可以选出一个非0常数子序列$\{a_{k_j}:\ j<\omega\}$，改记为$\{a'_j\}$。设诸$a'_j=m(\neq 0)$。取$t=\frac{1}{2m}$，即见(Ⅰ)对于$\{a'_j\}$不成立。从而(Ⅰ)对于$\{a_k\}$也不成立，矛盾。

（2）若$\{a_k\}$无上界。

(2·1) 先看一个特例，它对以下有用。设$\{a_k\}$为$\{b_k\cdot k!\}$形状，其中诸b_k为正整数并且当$i<j$时b_i整除b_j。

令
$$t_1=\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_7}+\frac{2b_8}{b_7}\left(\frac{1}{a_8}+\cdots+\frac{1}{a_{15}}\right)$$
$$+\frac{2^2b_{16}}{b_{15}}\left(\frac{1}{a_{16}}+\cdots+\frac{1}{a_{31}}\right)+\cdots$$
$$+\frac{2^nb_{2^{n+2}}}{b_{2^{n+2}-1}}\left(\frac{1}{a_{2^{n+2}}}+\cdots+\frac{1}{a_{2^{n+3}-1}}\right)+\cdots$$

(t_1存在，因易知右端收敛。)

当$k=2^n-1$ ($n=3,4,5,\cdots$) 时，由计算易知

$a_{2^n-1}t_1=$整数$+r_{2^n-1}$，其中$\frac{1}{4}<r_{2^n-1}<\frac{1}{2}(n=3,4,5,\cdots)$。

由此知$\lim\limits_{k\to\infty}e^{2\pi i a_k t_1}=1$不能成立，与(Ⅰ)矛盾。

(2·2) 若$\{a_k\}$中有无限多项为奇数，则当$t=\frac{1}{2}$时，$\{a_kt\}$中有无限多项为“整数$+\frac{1}{2}$”形状，从而易见(Ⅰ)不成立，矛盾。所以：几乎一切a_k都是偶数。

同理可知，对每个正整数m都有：几乎一切a_k都是m的倍数。

(2·3) 现在由$\{a_k\}$中如下归纳地选取一个正整数子序列$\{a_{k_j}:\ j<\omega\}$：

令a_{k_1}为$\{a_k\}$中任一正项（由(Ⅱ)知存在)。

设a_{k_n}已取定，取$k_{n+1}>k_n$使$a_{k_{n+1}}$是$(n+1)a_{k_n}$的正倍数。(由(Ⅱ)及(2·2)知存在)。

把所选的子序列改记为$\{a'_j: j<\omega\}$，易见它是(2·1)的情况。所以(Ⅰ)对$\{a'_j\}$不成立。从而(Ⅰ)对$\{a_k\}$也不成立，矛盾。

证毕

除了R之外，还有R的很多真子集A之适合$|A|=|R|$者，相应的$(\mathrm{P_A})$也能成立。例如，由定理1容易得出：

推论2 若$A\subseteq R$含有一个闭区间$[c,d]$($c<d$)，则$(\mathrm{P_A})$成立。

此外，也有R的很多真子集A之适合$|A|=|R|$者，其相应的$(\mathrm{P_A})$不成立。这可以通过以下的定理3来说明。

定理3 任意取定一个正整数$p\geqslant 2$。对任一严格递增的自然数序列$\nu=\{n_k\}$，令

$$A_\nu(=A_\nu^{(p)})=\left\{\ t:\ t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{p^{n_k}};\ \ \tau_k=0,1,\cdots,p-1\ \right\}$$

则：(P_{A_ν})成立的充分必要条件是，序列$\Delta\nu=\{n_{k+1}-n_k: k<\omega\}$有界。

证明 （1）证必要性。假设$\Delta\nu$无界。

对任何$t\in A_\nu$，以ε_k记$p^{n_k}t$的小数部分（即$p^{n_k}t-[p^{n_k}t]$，其中$[\cdots]$代表整数部分)，则由计算易得（注意ν的严格递增性)

$$\varepsilon_k\leqslant\frac{1}{p^{n_{k+1}-n_k-1}},\ (k<\omega) \qquad (\mathrm{I})$$

又由$\Delta\nu$无界知存在它的子序列$\{n_{k_j+1}-n_{k_j}: j<\omega\}$能使

$$n_{k_j+1}-n_{k_j}\to\infty\ (当j\to\infty),$$

从而由(Ⅰ)有

$$\varepsilon_{k_j}\to 0\ (当j\to\infty). \qquad (\mathrm{II})$$

把序列$\{n_{k_j}: j<\omega\}$改记为$\{m_j\}$，并注意ε_{k_j}的含意，则由

(Ⅱ)可得(以下把e^x改记为$e(x)$，以减少上标层次)

$$e(2\pi i p^{m_j} t) \to 1 \text{（当} j \to \infty\text{）}. \qquad (\text{Ⅲ})$$

由$t \in A_\nu$的任意性及(Ⅲ)式可知，自然数序列$\{p^{m_j}: j < \omega\}$适合(P_{A_ν})的前提.但显然此序列不以0为极限，所以(P_{A_ν})不成立.

（2）证充分性．设$\Delta\nu$有上界b_0，并令$b = \max(n_0, b_0)$.

由ν为严格递增可知，对任一正整数l，都存在ν中一项n_k能使$n_{k-1} < l \leqslant n_k$（当$k=0$时，可视$n_{k-1}$为0)．从而有

$$l = n_k - r, \ (0 \leqslant r < b). \qquad (\text{Ⅳ})$$

任取闭区间[0,1]中一个实数t，并用p进制表出为

$$t = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau_l}{p^l}, \ (0 \leqslant \tau_l < p) \qquad (\text{Ⅴ})$$

利用(Ⅳ)，可以把(Ⅴ)式右端的每一项都表示为如下形状

$$\frac{\tau_l}{p^l} = p^r \cdot \frac{\tau_l}{p^{n_k}}, \ (0 \leqslant r < b). \qquad (\text{Ⅵ})$$

由(Ⅴ),(Ⅵ)及A_ν的定义不难看出：存在A_ν中的b个数$t_0, t_1, \cdots, t_{b-1}$能使

$$t = p^0 t_0 + p^1 t_1 + \cdots + p^{b-1} t_{b-1}. \qquad (\text{Ⅶ})$$

现在，任取一自然数序列$\{a_k\}$，并设它适合(P_{A_ν})的题设．则对上述每一t_r ($0 \leqslant r < b$) 都有

$$e(2\pi i a_k t_r) \to 1 \text{（当} k \to \infty\text{）},$$

从而由(Ⅶ)可知也有

$$e(2\pi i a_k t) \to 1 \text{（当} k \to \infty\text{）}.$$

又由于t为[0,1]中任取的数，故由推论2可知

$$a_k \to 0 \text{（当} k \to \infty\text{）}.$$

所以$\{a_k\}$适合(P_{A_ν})的结论。 证毕

§2 在MA(ω_1)下的结果

由上节可知，存在很多适合 $|A|=|R|$ 的 $A\subseteq R$ 能使(P_A)成立，也存在很多适合 $|A|=|R|$ 的$A\subseteq R$能使(P_A)不成立。后者是因为：任取$\nu=\{n_k\}$之使$\Delta\nu$无界者，则由定理 3 知相应的A_ν（易见 $|A_\nu|=|R|$）就能使(P_{A_ν})不成立。并且由A_ν的定义易知当ν不同时相应的A_ν也不同。另外，也可通过改变p而得到不同的A_ν。

本节考虑 $|A|<|R|$ 的情况，并证明在MA(ω_1)下的一个较强的结果（见定理 6）。

我们在以下讨论中把一个自然数无限序列 $\{n_k:k<\omega\}$等同于一个函数$f:\omega\to\omega$，其中$f(k)=n_k(k<\omega)$。

引理4 设A是R的任一个基数为ω_1的子集，记为$A=\{t_\alpha:\alpha<\omega_1\}$。则存在一族严格递增的函数 $f^\alpha:\omega\to\omega(\alpha<\omega_1)$能适合下列二条件：

（a）对任何$\beta<\alpha<\omega_1$，当把f^α，f^β看作自然数的无限序列时，f^α除有限多项外是f^β的子序列。并且当自然数k适当大之后恒有$f^\beta(k)\leqslant f^\alpha(k)$。

（b）对任何$\beta\leqslant\alpha<\omega_1$及$t_\beta\in A$，实数序列

$$\{f^\alpha(k)t_\beta-[f^\alpha(k)t_\beta]:k<\omega\}$$

（其中$[\cdots]$代表整数部分）收敛于一极限值s_β，并且此值与α无关。

证明 （1）先定义f^0。在有界序列

$$\{nt_0-[nt_0]:n<\omega\}$$

中任意取定一个收敛子序列

$$\{n_kt_0-[n_kt_0]:k<\omega\},$$

以s_0记其极限值，并令

$$f^0=\{n_k:k<\omega\}$$

即可(此时易见 (a), (b)适合.).

（2）对任一$0<\alpha<\omega_1$,设对一切$\beta<\alpha$都已定义了适合(a)及（b）的严格递增函数f^β. 以下分二情况定义f^α.

(2·1) 当α为后继序数时.设$\alpha=\gamma+1$，在有界序列

$$\{f^\gamma(n)t_\alpha-[f^\gamma(n)t_\alpha]:n<\omega\}$$

中任意取定一个收敛子序列

$$\{f^\gamma(n_k)t_\alpha-[f^\gamma(n_k)t_\alpha]:k<\omega\},$$

以s_α记其极限值，并令

$$f^\alpha=\{f^\gamma(n_k):k<\omega\}.$$

由于f^α是f^γ的子序列，故由归纳假设可以看出:对于此f^α及任何$\beta<\alpha$，(a)成立；对于此f^α及任何$\beta\leqslant\alpha$，(b)成立.

(2·2) 当α为极限序数时.

任意取定一个严格递增的序数序列$\{\beta_i:i<\omega\}$使适合

$$\alpha=\sup\{\beta_i:i<\omega\}$$

(由$\alpha<\omega_1$易知$\{\beta_i\}$存在.).

由归纳假设，对任何$i<j<\omega$，存在正整数m_{ij}能使

f^{β_j}除去前m_{ij}项外是f^{β_i}的子序列;

并且　　对一切自然数$k>m_{ij}$有$f^{\beta_i}(k)\leqslant f^{\beta_j}(k)$.

由归纳假设还有，对任何$i<\omega$及任何$\gamma\leqslant\beta_i$，序列

$$\{f^{\beta_i}(k)t_\gamma-[f^{\beta_i}(k)t_\gamma]:k<\omega\}$$

收敛于一个与β_i无关的极限值s_γ.

现在先定义一个函数$g:\omega\to\omega$如下

$$g(i)=f^{\beta_i}(l_i)$$

其中$l_0=1$，当$i>0$时，

$$l_i=\max\{i,m_{0i},m_{1i},\cdots,m_{i-1\,i},l_0,l_1,\cdots,l_{i-1}\}+1.$$

我们将利用g来定义f^α，先给出g的两个性质.

首先，对任何$\beta<\alpha$，易见存在$h<\omega$能使$\beta<\beta_h$，从而由归纳假设知f^{β_h}是f^β的子序列. 由此及g的定义及上述由归纳假设已

知的关于诸f^{β_i}，f^{β_j}间的联系，就不难看出$\{g(i):h\leqslant i<\omega\}$是$f^{\beta}$的子序列。

其次，对任何$\beta<\alpha$，由归纳假设有

$$f^{\beta}(k)t_{\beta}-[f^{\beta}(k)t_{\beta}]\to s_{\beta},\ (\text{当}k\to\infty);$$

由此及上段可得

$$g(i)t_{\beta}-[g(i)t_{\beta}]\to s_{\beta},\ (\text{当}i\to\infty).$$

现在，在有界序列

$$\{g(i)t_{\alpha}-[g(i)t_{\alpha}]:i<\omega\}$$

中任意取定一个收敛子序列

$$\{g(i_k)t_{\alpha}-[g(i_k)t_{\alpha}]:k<\omega\}$$

记其极限值为s_{α}。并定义f^{α}为

$$f^{\alpha}(k)=g(i_k),\ (k<\omega).$$

则由以上讨论易见f^{α}适合（a）及（b）。

（3）函数族$f^{\alpha}(\alpha<\omega_1)$的超限归纳定义及相应的（$a$）及（$b$）的证明至此完成。　　　　证毕

引理5　在MA(ω_1)之下，对于R的任一个基数为ω_1的子集$A=\{t_{\alpha}:\alpha<\omega_1\}$，都存在一个严格递增函数$f:\omega\to\omega$能使：

对每一$t_{\alpha}\in A$，序列$\{f(k)t_{\alpha}-[f(k)t_{\alpha}]:k<\omega\}$都收敛。

证明　（1）对于A，依引理4取定一族适合（a）及（b）的函数$f^{\alpha}:\omega\to\omega,(\alpha<\omega_1)$。

对每个$\alpha<\omega_1$，令$F_{\alpha}=\omega\setminus\mathrm{range}(f^{\alpha})$（其中$\mathrm{range}(f^{\alpha})$为$f^{\alpha}$的值集。）。

现在定义一个偏序集$(P,\leqslant)$如下，令

$P=\{\langle N,K\rangle:N$为ω的有限子集，K为ω_1的有限子集$\}$。

P中的偏序$\leqslant$如下规定：

$$\langle N,K\rangle\leqslant\langle N',K'\rangle\text{当且只当}\begin{cases}N'\subseteq N,\text{并且}\\K'\subseteq K,\text{并且}\\(N\setminus N')\cap\bigcup_{\alpha\in K'}F_{\alpha}=\phi.\end{cases}$$

(不难验证≤确是P上的偏序关系.)

(2) 现在证$(P,\leqslant)$适合c.c.c..

任取P的不可数子集Q，则Q中必含有第1分量相同的两个不同元$\langle N,K\rangle$及$\langle N,K'\rangle$(因易见P中元素的第1分量只有可数多种取法.)．但显见P中的元$\langle N,K\cup K'\rangle$适合

$$\langle N,K\cup K'\rangle\leqslant\langle N,K\rangle\text{并且}\langle N,K\cup K'\rangle\leqslant\langle N,K'\rangle,$$

所以$\langle N,K\rangle$与$\langle N,K'\rangle$在P中相容，从而Q不是P中的反链.

(3) 对每个$n<\omega$，令

$$D_n=\{\langle N,K\rangle\in P:|N|>n\}.$$

对每个$\alpha<\omega_1$，令

$$E_\alpha=\{\langle N,K\rangle\in P:\alpha\in K\}$$

再令

$$\triangle=\{D_n:n<\omega\}\cup\{E_\alpha:\alpha<\omega_1\}.$$

现在证△是P的一族稠密子集.

(3·1) 任意取定一个$n<\omega$，证D_n在P中稠密.

任取$\langle N,K\rangle\in P$.

对每一$\alpha\in K(\subseteq\omega_1)$，$f^\alpha$为严格递增函数，所以range$(f^\alpha)$为无限集. 又因诸$f^\alpha$适合引理4的条件 ($a$)，故由$K$为有限集易知

$$\bigcap_{\alpha\in K}\text{range}(f^\alpha)\text{为无限集.}\tag{I}$$

另外，由F_α的定义易得下列等式

$$\omega\setminus\bigcup_{\alpha\in K}F_\alpha=\bigcap_{\alpha\in K}\text{range}(f^\alpha).\tag{II}$$

现在看N. 必要时对它添加$\omega\setminus\bigcup_{\alpha\in K}F_\alpha$中一些元，可得一有限集$N'\supseteq N$使$|N'|>n$(由 (I) ，(II) 知此可能.). 从而有

$$\langle N',K\rangle\in D_n.\tag{III}$$

并且，由N'的作法可知

$$(N'\setminus N)\cap\bigcup_{\alpha\in K}F_\alpha=\phi,$$

再由$N\subseteq N'$即知在P中有

$$\langle N',K\rangle\leqslant\langle N,K\rangle.\tag{IV}$$

由 (III) ，(IV) 及$\langle N,K\rangle$的任意性即知D_n在P中稠密.

(3·2) 任意取定一个$\alpha<\omega_1$，证E_α在P中稠密。

任取$\langle N,K\rangle\in P$。令$K'=K\cup\{\alpha\}$，即易见$\langle N,K'\rangle\in E_\alpha$并且$\langle N,K'\rangle\leqslant\langle N,K\rangle$。所以$E_\alpha$在$P$中稠密。

(4) 由于$|\triangle|=\omega_1$，故由$MA(\omega_1)$可知：存在P的一个滤子Q，它与$\triangle$中每个元的交集都不空。

令
$$F=\bigcup\{N:\langle N,K\rangle\in Q\}.$$
下面证明F的两个性质。

(4·1) 证F为ω的无限子集。

对任何$m<\omega$，有$D_m\in\triangle$，故应$D_m\cap Q\neq\phi$。设$\langle N,K\rangle$在此交集中。由$\langle N,K\rangle\in D_m$知$|N|>m$。由$\langle N,K\rangle\in Q$知$N\subseteq F$。所以$|F|>m$。再由$m$的任意性即知$F$为无限集。

(4.2) 证明：对每一$\alpha<\omega_1$，$F\cap F_\alpha$为有限集。

对任何$\alpha<\omega_1$，由$E_\alpha\in\triangle$知$E_\alpha\cap Q\neq\phi$。设$\langle N,K\rangle$在此交集中。

对任何$\langle N',K'\rangle\in Q$，由$Q$的滤子性质知存在$\langle N'',K''\rangle\in Q$能使
$$\langle N'',K''\rangle\leqslant\langle N,K\rangle\text{并且}\langle N'',K''\rangle\leqslant\langle N',K'\rangle.$$
从而有$N'\subseteq N''$及
$$(N''\setminus N)\cap\bigcup_{\beta\in K}F_\beta=\phi. \qquad (\text{V})$$
又由$\langle N,K\rangle\in E_\alpha$知$\alpha\in K$，从而由(V)有
$$(N''\setminus N)\cap F_\alpha=\phi,$$
再由$N'\subseteq N''$有
$$(N'\setminus N)\cap F_\alpha=\phi. \qquad (\text{VI})$$
由(VI)可得
$$F\cap F_\alpha=\bigcup\{N':\langle N',K'\rangle\in Q\}\cap F_\alpha\subseteq N.$$
但N为有限集，所以$F\cap F_\alpha$为有限集。

(5) 由(4.1)知，F可以表示为一无限严格递增序列：
$$F=\{n_0<n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots\},$$

由此可定义一个严格递增函数$f:\omega\to\omega$为：

$$f(k)=n_k,\ (k<\omega).$$

由（4·2）可知，对每个$\alpha<\omega_1$，只有有限个$f(k)$在F_α中。再由F_α的定义可知，除了这有限个$f(k)$之外，其他诸$f(k)$（$k<\omega$）都属于$\mathrm{range}(f^\alpha)$。又因$\{f^\alpha(k):k<\omega\}$也是严格递增序列（见引理4），故知：

除有限多项外，$\{f(k):k<\omega\}$是$\{f^\alpha(k):k<\omega\}$的子序列。再由f^α适合引理4的（b）就可得到：

对每一$\alpha<\omega_1$，序列$\{f(k)t_\alpha-[f(k)t_\alpha]:k<\omega\}$都收敛。这也就是本引理的结论。　　证毕

定理6　在$\mathrm{MA}(\omega_1)$之下，对于R的任一基数为ω_1的子集A，命题（$\mathrm{P_A}$）都不成立。

证明　记A为$\{t_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，并依引理5选取一个严格递增函数$f:\omega\to\omega$。再由$f$定义一个正整数序列如下：

$$a_k=f(k+1)-f(k),\ (k<\omega).$$

现在证明，$\{a_k:k<\omega\}$适合（$\mathrm{P_A}$）的前提。

对任何$t_\alpha\in A$，有

$$e(2\pi i a_k t_\alpha)=e(2\pi i f(k+1)t_\alpha)\cdot e(-2\pi i f(k)t_\alpha)$$

又由引理5知，序列

$$\{f(k)t_\alpha-[f(k)t_\alpha]:k<\omega\}$$

收敛于一极限值s_α。再注意到函数$e(z)$的周期性，即知：

$$e(2\pi i a_k t_\alpha)\to e(2\pi i s_\alpha)\cdot e(-2\pi i s_\alpha)=1,\ (\text{当}k\to\infty).$$

所以$\{a_k\}$适合（$\mathrm{P_A}$）的前提。

但诸$a_k(k<\omega)$都是正整数，所以$\{a_k\}$不适合（$\mathrm{P_A}$）的结论。所以，命题（$\mathrm{P_A}$）不成立。　　证毕

对任何$B\subseteq A\subseteq R$，如果（$\mathrm{P_A}$）不成立，显见（$\mathrm{P_B}$）也不成立。故由上定理可得

推论7　在$\mathrm{MA}(\omega_1)$之下，对于R的任一基数不超过ω_1的子集

A，命题（P_A）都不成立。

§3　两个独立性结果

由定理1及定理6，我们立刻得到下列结果。

定理8　下列命题：

(Π)　　存在$A\subseteq R$使$|A|=\omega_1$且（P_A）成立。

是独立于ZFC的。

证明　（1）在MA(ω_1)之下，由定理6知（Π）为假。

（2）在CH之下，有$|R|=\omega_1$，故由定理1知（Π）为真。

证毕

另外，由§1的内容及定理6及公理集合论的知识又可知道，也存在很多具体的$A\subseteq R$，其相应的命题（P_A)是独立于ZFC的。举例如下：

定理9　令$K\subseteq R$为全体可构成（constructible）实数所组成的集合，则（P_K）是独立于ZFC的。

证明（大意）　K的定义不在此介绍，可参看各种公理集合论专书。

（1）在$V=L$之下，有$K=R$，故由定理1知（P_K）为真。

（2）在MA(ω_1)之下，可以证明$|K|=\omega_1$，故由定理6知（P_K）为假。

参　考　文　献

〔1〕T. Tugué and H. Nomoto, Lecture Notes in Math., Vol. 891, 307-321, Springer-Verlag, 1981.

第九章　Pelczynski猜想的独立性

Pelczynski猜想是一个关于Banach空间的猜想。为了介绍它，先叙述一些概念和记号。

设Ω为一集合，Σ为由Ω的一些子集所构成的σ-代数，μ为Σ上一个正测度。

以$L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$（或简记为$L^1(\mu)$）记Ω上适合

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu < \infty$$

的实值μ-可测函数的全体等价类所构成的Banach空间。

以$L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$（或简记为$L^\infty(\mu)$）记$\Omega$上实值$\mu$-可测$\mu$-ess。有界函数的全体等价类对于范数

$$\|f\|_\infty = \mu\text{-ess.}\sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

所构成的Banach空间。

一般，我们把$L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$等同于$L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$的对偶空间（即共轭空间）$L^1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$。

设I为一集合。取$\Omega = \{0, 1\}^I$，取Σ为Ω的全体Borel子集所构成的σ-代数，并取μ为（紧致可换）拓扑群$\{0, 1\}^I$上的（唯一的）Haar概率（乘积）测度。这时，我们特别把$L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$及$L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$分别改记为$L^1\{0, 1\}^I$及$L^\infty\{0, 1\}^I$。

设Γ为一集合。

以$l^1(\Gamma)$记Γ上一切适合

$$\sum_{x \in \Gamma} |f(x)| < \infty$$

的实值函数所构成的Banach空间（以$\sum_{x \in \Gamma} |f(x)|$为范数）。若$|\Gamma| = \alpha$，我们也把$l^1(\Gamma)$改记为$l^1(\alpha)$或$l^1_\alpha$。

以$l^\infty(\Gamma)$记Γ上一切实值有界函数对于范数

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in \Gamma} |f(x)|$$

所构成的Banach空间。若 $|\Gamma| = \alpha$，我们也把$l^\infty(\Gamma)$改记为$l^\infty(\alpha)$或l^∞_α。

1968年，A.Pelczynski在〔1〕中证明了下列事实.

定理 设α为一无限基数，X为一Banach空间。如果$l^1(\alpha)$能同构嵌入X中，则$L^1\{0, 1\}^\alpha$能同构嵌入X^*中（X^*为X的对偶空间.）.

他猜想这个定理的逆命题也成立，并证明了$\alpha=\omega$的情况。1978年，R.Haydon在承认连续统假设CH的前提下构作了一个$\alpha=\omega_1$时的反例（见〔2〕或以下§4.）。1982年，S.Argyros在〔3〕中证明，当$\alpha>\omega_1$时，Pelczynski猜想成立。他并且证明，如果承认$MA(\omega_1)$，则当$\alpha=\omega_1$时这个猜想也成立（见以下定理6.）.

这样，就证明了当$\alpha=\omega_1$时Pelczynski猜想的独立性。也就是，下列命题：

（Pz） 设X为一Banach空间。如果$L^1\{0, 1\}^{\omega_1}$能同构嵌入X^*中，则$l^1(\omega_1)$能同构嵌入X中。

是相对独立于ZFC的。本章根据〔4〕对此作一介绍。

§1 预备知识（一）

引理1 设$\{T_\xi: \xi<\omega_1\}$为一族有限集。则存在ω_1的不可数子集A及一有限集S（可以为空集）能使：

对任何$\xi, \eta\in A$之$\xi\neq\eta$者，都有$S_\xi\cap S_\eta=S$。

证明略去（参看〔5〕p.225引理22.6或〔6〕p.49定理1.5）.

设X为一Banach空间，其范数为$\|\cdot\|$。以S_X记X中的单位球，即

$$S_X=\{x\in X: \|x\|\leqslant 1\}.$$

（以下为了减少下标层次，有时也把S_X改记为$S[X]$。）

定义 设X为一Banach空间，X^*为其对偶空间。称由X的

拓扑在X^*上所导出的拓扑为X^*上的**弱＊拓扑**（即：对X^*中任何元素序列$\{f_i:i<\omega\}$及元素f，当且只当对一切$x\in X$都有$f_i(x)\to f(x)$时，令$f_i\to f$。）。

引理2 设X为一Banach空间．则对于$S[X^{**}]$的弱＊拓扑而言，$S[X]$在$S[X^{**}]$中稠密。

证明可参看〔7〕第424—425页。

定义 设Γ为一集合。考虑$l^1(\Gamma)$的子集

$$B=\{e_\gamma:\gamma\in\Gamma\},\ \text{其中}e_\gamma(x)=\begin{cases}1,&\text{当}x=\gamma;\\0,&\text{当}x\neq\gamma.\end{cases}$$

显见B是$l^1(\Gamma)$的一组基底，以下称为$l^1(\Gamma)$的**常用基底**。

定义 设X为一Banach空间，$\{x_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$为$X$的子集．如果存在同构嵌入$T$：$l^1(\Gamma)\to X$能使

$$\text{对每一}\gamma\in\Gamma,\ \text{都有}T(e_\gamma)=x_\gamma.$$

（其中e_γ见上一定义）．则称$\{x_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$（在$X$中）**等价于$l^1(\Gamma)$的常用基底**（注意$T$未必是满射．）．

定义 设S为一集合，$\{(A_i,\ B_i):i\in I\}$为S的一族子集序偶（即：诸A_i，$B_i\subseteq S$）．如果对I的任何两个不相交的有限子集F，G（可以为空集）都有

$$(\bigcap_{i\in F}A_i)\cap(\bigcap_{i\in G}B_i)\neq\phi.$$

则称序偶族$\{(A_i,\ B_i):i\in I\}$为**独立的**。

引理3 设S为一集合．对每一$\xi<\omega_1$，$f_\xi:S\to R$为一函数（R为实数域）．设存在正实数M适合：

$$\text{对每一}\xi<\omega_1,\ \|f_\xi\|\ (=\sup_{x\in S}|f_\xi(x)|\ )\leqslant M.$$

并设存在实数γ及$\delta>0$能使序偶族$\{(A_\xi,\ B_\xi):\xi<\omega_1\}$为独立的，其中

$$A_\xi=f_\xi^{-1}(\gamma+\delta,\ \infty),\ B_\xi=f_\xi^{-1}(-\infty,\ \gamma)\ .\ (\xi<\omega_1)$$

则：对任何实数α_1，…，α_n及任何$\xi_1<\cdots<\xi_n<\omega_1$，都有

$$\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_{\xi_k}\right\|_\infty \leqslant M\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|.$$

从而，$\{f_\xi:\xi<\omega_1\}$（在$l^\infty(S)$中）等价于$l^1(\omega_1)$的常用基底。

证明 令

$$P=\{k:1\leqslant k\leqslant n,\ \alpha_k>0\},\ N=\{k:1\leqslant k\leqslant n,\ \alpha_k\leqslant 0\}.$$

由$\{(A_\xi,\ B_\xi):\xi<\omega_1\}$的独立性可知存在

$$x\in(\bigcap_{k\in P}A_{\xi_k})\cap(\bigcap_{k\in N}B_{\xi_k}),$$

及
$$y\in(\bigcap_{k\in N}A_{\xi_k})\cap(\bigcap_{k\in P}B_{\xi_k}).$$

故有
$$\sum_{k\in P}|\alpha_k|(\gamma+\delta)\leqslant\sum_{k\in P}\alpha_k f_{\xi_k}(x),$$
$$\sum_{k\in P}|\alpha_k|(-\gamma)\leqslant\sum_{k\in P}\alpha_k(-f_{\xi_k}(y))=-\sum_{k\in P}\alpha_k f_{\xi_k}(y);$$

及
$$\sum_{k\in N}|\alpha_k|(\gamma+\delta)\leqslant-\sum_{k\in N}\alpha_k f_{\xi_k}(y),$$
$$\sum_{k\in N}|\alpha_k|(-\gamma)\leqslant\sum_{k\in N}(-\alpha_k)(-f_{\xi_k}(x))=\sum_{k\in N}\alpha_k f_{\xi_k}(x).$$

从而有

$$(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|)\delta\leqslant\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_{\xi_k}(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_{\xi_k}(y)$$
$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_{\xi_k}(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_{\xi_k}(y)\right|$$
$$\leqslant 2\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha f_{\xi_k}\right\|_\infty\leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|.$$

证毕

定义 设f为定义在卡氏积$X=\prod_{i\in I}X_i$上的实值函数。设$J\subseteq I$。以π_J记由X到$\prod_{i\in J}X_i$上的自然射影。如果存在$\prod_{i\in J}X_i$上的实值函数g能使$f=g\circ\pi_J$，则称f**依赖于坐标集J**。

定义 设I为一集合，$A\subseteq I$。

以π_A: $\{0,\ 1\}^I\to\{0,\ 1\}^A$

记自然射影。当A为1元集$\{i\}$时也把π_A简记为π_i。

以P_A: $L^1\{0,\ 1\}^A\to L^1(0,\ 1)^I$

记$L^1\{0,\ 1\}^A$上由π_A导出的线性算子，即$P_A(f)=f\circ\pi_A$。

以E_A^∞: $L^\infty\{0,\ 1\}^I\to L^\infty\{0,\ 1\}^A$

记P_A的共轭算子（为减少下标层次，以下有时把E_A^∞改记为E

$[\infty, A]_*)$.

引理4 设I为一非空集，S为I的有限子集．令

$$p_S: \{0, 1\}^I \to \{0, 1\}$$

为$p_S(x) = \prod_{i \in S} \pi_i(x)$（当$S$为空集$\phi$时令$p_\phi = 1$.）.则有下列诸性质成立：

（1）$\{p_S: S \subseteq I, S\text{有限}\}$的线性组合在$L^\infty\{0, 1\}^I$中稠密．

（2）若I为有限集，$f \in L^\infty\{0, 1\}^I$，则

$$f = \sum_{S \subseteq I} \alpha_S p_S.$$

其中$\alpha_S = \int f \cdot p_S$（对$\{0, 1\}^I$上的Haar测度积分）．

（3）若$f \in L^\infty\{0, 1\}^I$依赖于坐标集N_f，S为I的有限子集且$S \nsubseteq N_f$，则

$$\int f \cdot p_S = 0.$$

（4）若$f \in L^\infty\{0, 1\}^I$依赖于坐标集N_f，$K \subseteq I$，则

$$E_K^\infty(f) = E_{K \cap N_f}^\infty(f).$$

（5）若$\{M_n: n < \omega\}$为I的一系列互异的有限子集，则在$L^\infty\{0, 1\}^I$中有

$$p_{M_n} \to 0 \quad （弱*收敛）.$$

证明 （1）、（2）易见.

证（3）：设$i \in S \setminus N_f$，则由Fubini定理有

$$\int f \cdot p_S = \int f p_{S \setminus \{i\}} \cdot p_{\{i\}} = \int f p_{S \setminus \{i\}} \cdot \int p_{\{i\}},$$

再由$\int p_{\{i\}} = 0$即得（3）的结论.

（4）、（5）由（1）及（3）易得　　　　证毕

§2 在MA(ω_1)下对猜想Pz的证明

定理5 在MA(ω_1)之下，设$\{f_\xi: \xi < \omega_1\} \subseteq L^\infty\{0, 1\}^{\omega_1}$，并设存在正实数$M$及$\theta$能使：

（a） 对每一$\xi < \omega_1$，$\|f_\xi\|_\infty \leq M$．并且

（b）　对任何$\xi<\eta<\omega_1$，$\|f_\xi-f_\eta\|_1\geqslant\theta$。
则存在ω_1的不可数子集A能使$\{f_\xi:\xi\in A\}$（在$L^\infty\{0,1\}^{\omega_1}$中）等价于$l^1(\omega_1)$的常用基底。

证明　（1）对每个$\xi<\omega_1$，任意取定一个f_ξ所依赖的可数坐标集N_ξ。

（1.1）先证明：存在ω_1的不可数子集$A_1=\{i_\eta:\eta<\omega_1\}$及$\omega_1$的一族有限子集$\{I_\xi:\xi\in A_1\}=\{I_{i_\eta}:\eta<\omega_1\}$能使下列（Ⅰ）及（Ⅱ）成立。

（Ⅰ）对每一$\xi\in A_1$，有$\int f_\xi p_{I_\xi}\neq0$。（$p_{I_\xi}$见引理4）

（Ⅱ）对每一$\xi\in A_1$，$I_\xi\not\subseteq M_\xi$。其中$M_\xi=\bigcup_{\zeta\in A_1,\zeta<\xi}N_\zeta$。

（1.2）我们用超限归纳论证。设$\xi<\omega_1$，并设已定义了适合条件的$\{i_\eta:\eta<\xi\}$及$\{I_{i_\eta}:\eta<\xi\}$。

令$M=\bigcup_{\eta<\xi}N_{i_\eta}$，则$M$可数，$L^1\{0,1\}^M$可分。再由题设的（$b$）及引理4的（1）可知存在$j<\omega_1$能使

$$j>\sup\{i_\eta:\eta<\xi\},$$

并存在ω_1的有限子集$J\subseteq N_j$能使

$$f_jp_J\neq0\text{并且}J\not\subseteq M.$$

取j，J各作为i_ξ及I_{i_ξ}即可。

（2）由引理1可知，存在A_1的不可数子集A_2及ω_1的有限子集I能使

对一切ξ，$\eta\in A_2$之$\xi\neq\eta$者，都有$I_\xi\cap I_\eta=I$。

易见，对每一$\xi\in A_2$，$I_\xi\setminus I\neq\phi$。

以下讨论$I\neq\phi$的情况。（$I=\phi$时可类似地讨论，且更简单。）

（3）由$E^\infty_{I_\xi}$的定义可知

$$\int E^\infty_{I_\xi}(f_\xi)p_{I_\xi}=\int f_\xi p_{I_\xi}\neq0.$$

又由引理4的（3）可知，函数$E^\infty_{I_\xi}(f_\xi)$依赖于I_ξ全集。所以，对每一$\xi\in A_2$，存在$e_\xi\in\{0,1\}^I$及有理数γ_ξ，δ_ξ（其中$\delta_\xi>0$）

能使

$$\{x\in\{e_\xi\}\times\{0,1\}^{I_\xi\setminus I}:E^\infty_{I_\xi}(f_\xi)(x)<\gamma_\xi\}\neq\phi,$$

且 $$\{x\in\{e_\xi\}\times\{0,1\}^{I_\xi\setminus I}:E^\infty_{I_\xi}(f_\xi)(x)>\gamma_\xi-\delta_\xi\}\neq\phi.$$

由此易知，存在A_2的不可数子集A_3及$e\in\{0,1\}^I$及有理数γ，δ（$\delta>0$）能使

对每一$\xi\in A_3$，都有$e_\xi=e$，$\gamma_\xi=\gamma$，$\delta_\xi=\delta$。

（4）对于A_3的每一有限子集F，令 $A(F)=\bigcup\limits_{\xi\in F}I_\xi$。

如果对每一$\xi\in F$，都存在$\{0,1\}^{A(F)}$的非空子集Γ_ξ，$\triangle_\xi$能使下列性质（a）至（d）成立，则称F具有性质（*）：

（a）Γ_ξ，$\triangle_\xi$依赖于I_ξ（指：二者的特征函数依赖于I_ξ。）。

（b）$\pi_I(\Gamma_\xi)=\pi_I(\triangle_\xi)=\{e\}$。

（c）当$x\in\Gamma_\xi$时，$E^\infty_{A(F)}(f_\xi)(x)<\gamma$。

（d）当$x\in\triangle_\xi$时，$E^\infty_{A(F)}(f_\xi)(x)>\gamma-\delta$。

（一般，Γ_ξ，$\triangle_\xi$也与F有关，必要时可改记为$\Gamma_{\xi,F}$，$\triangle_{\xi,F}$。）

（5）现在定义一个偏序集（P，$\leqslant$）如下：

$$P=\{F:F\text{为}A_3\text{的有限子集且具有性质（*）}\}.$$

对于F_1，$F_2\in P$，当且只当$F_1\supseteq F_2$时，令$F_1\leqslant F_2$。（注意P不空，因易见A_3的每一单元子集都在P中。）

以下证明：偏序集（P，$\leqslant$）适合可数反链条件c.c.c.。

（6）任取P的不可数子集$Q=\{F_\sigma:\sigma<\omega_1\}$，以下将证明它不是$P$的反链。

由引理1可知，存在ω_1的不可数子集Γ及ω_1的一个有限子集F能使

对任何σ，$\tau\in\Gamma$之$\sigma\neq\tau$者，都有$F_\sigma\cap F_\tau=F$。

以下讨论$F\neq\phi$的情况。（$F=\phi$时可类似地讨论，且更简单。）

（7）令 $A(F)=\bigcup\limits_{\xi\in F}I_\xi$（如前），$N_F=\bigcup\limits_{\xi\in F}N_\xi$。

并令 $A_\sigma = A(F_\sigma) = \bigcup_{\xi\in F_\sigma} I_\xi$，$N_\sigma = N_{F_\sigma} = \bigcup_{\xi\in F_\sigma} N_\xi$.

由（1）中I_ξ的取法可知，当$\sigma\in\Gamma$时有$A_\sigma\subseteq N_\sigma$.

通过归纳论证易知，存在Γ的不可数子集Γ_1及自然数ν能使：

当$\sigma\in\Gamma_1$时，$|A_\sigma| = \nu$，$N_F\cap A_\sigma = A(F)$.

并且 当σ，$\tau\in\Gamma_1$且$\sigma<\tau$时，$N_\sigma\cap A_\tau\subseteq A(F)$.

现在选取$\sigma_0\in\Gamma_1$使$\Lambda = \{\sigma\in\Gamma_1:\sigma<\sigma_0\}$为无限集.

由以上诸条件及引理4的（4）可知，如果$\sigma\in\Lambda$且$\xi\in F_\sigma$，则有

$$E[\infty, A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})](f_\xi) = E[\infty, A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})\cap N_\xi](f_\xi)$$
$$= E[\infty, A(F_\sigma)\cap N_\xi](f_\xi) = E[\infty, A(F_\sigma)](f_\xi).$$

（8）现在证明：对每一$\varepsilon>0$，存在一有限集$I(\varepsilon)\subseteq\Lambda$能使：

当$\sigma\in\Lambda\setminus I(\varepsilon)$，$\xi\in A(F_{\sigma_0})$时，有

$$\|E[\infty, A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})](f_\xi) - E[\infty, A(F_{\sigma_0})](f_\xi)\|_\circ<\varepsilon.$$

这是因为，由引理4的（2），我们有

$$E[\infty, A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})](f_\xi) = \sum\{\alpha_M p_M: M\subseteq A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})\},$$

其中$\alpha_M = \int f_\xi p_M$，以及

$$E[\infty, A(F_{\sigma_0})](f_\xi) = \sum\{\alpha_M p_M: M\subseteq A(F_{\sigma_0})\}.$$

令$M_0 = 2^{2\nu} - 2^\nu$，则由引理4的（5）可知存在一有限集$I(\varepsilon)\subseteq\Lambda$能使：

当$\sigma\in\Lambda\setminus I(\varepsilon)$，$\xi\in A(F_{\sigma_0})$，$M\subseteq A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})$时，有

$$|\int f_\xi p_M| = |\alpha_M| < \frac{\varepsilon}{M_0}.$$

从而有 $\|E[\infty, A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})](f_\xi) - E[\infty, A(F_{\sigma_0})](f_\xi)\|_\circ$

$$= \|\sum\{\alpha_M p_M: M\subseteq A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0}), M\nsubseteq A(F_{\sigma_0})\}\|_\circ$$
$$\leqslant\sum\{|\alpha_M|: M\subseteq A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0}), M\nsubseteq A(F_{\sigma_0})\}<\varepsilon.$$

（9）令$\varepsilon_{\sigma_0} = \min\{\varepsilon_\xi:\xi\in A(F_{\sigma_0})\}$.

其中 $\varepsilon_\xi = \min\{\min_{x\in\Delta_\xi}(E[\infty, F_{\sigma_0}](f_\xi)(x)) - (\gamma-\delta),$

$$\gamma - \max_{y \in \Gamma_\xi}(E[\infty, F_{\sigma_0}](f_\xi)(y))\}.$$

再取$\varepsilon_1>0$使$\varepsilon_1<\varepsilon_{\sigma_0}$。以下证明：若$\sigma\in\Lambda\setminus I(\varepsilon_1)$，则$F_\sigma\cup F_{\sigma_0}\in P$。

(10) 由（7）中最后的等式及（8）可知：

当$\xi\in A(F_{\sigma_0})$时，有

$$\|E[\infty, A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})](f_\xi)-E[\infty, A(F_{\sigma_0})](f_\xi)\|_\infty<\varepsilon_1. \quad (\mathrm{I})$$

并且　当$\xi\in A(F_\sigma)$时，有

$$E[\infty, A(F_\sigma\cup F_{\sigma_0})](f_\xi)=E[\infty, A(F_\sigma)](f_\xi). \quad (\mathrm{II})$$

由（Ⅱ）可知：

当$\xi\in A(F_\sigma)$时，有

$\Gamma[\xi,F_\sigma]=\Gamma[\xi,F_\sigma\cup F_{\sigma_0}]$，$\Delta[\xi,F_\sigma]=\Delta[\xi,F_\sigma\cup F_{\sigma_0}]$。

（其中$\Gamma[\xi,F_\sigma]$，…代表Γ_{ξ,F_σ}，…。下同。）

由（Ⅰ）及ε_1的取法可知：

当$\xi\in A(F_{\sigma_0})$时，有

$\Gamma[\xi, F_{\sigma_0}]=\Gamma[\xi,F_\sigma\cup F_{\sigma_0}]$，$\Delta[\xi,F_{\sigma_0}]=\Delta[\xi,F_\sigma\cup F_{\sigma_0}]$。

由以上及P的定义即易见

$$F_\sigma\cup F_{\sigma_0}\in P.$$

所以，（6）中所述在P中任取的不可数子集Q中含有在P中相容的两个不同元素F_σ及F_{σ_0}（$\sigma\neq\sigma_0$），从而Q不是反链。由此即知偏序集（P，$\leqslant$）适合c.c.c.。

(11) 由（P，$\leqslant$）适合c.c.c.及$MA(\omega_1)$不难推出：存在A_3的不可数子集A，它的每一有限子集都在P中。

现在，对$\{f_\xi:\xi\in A\}$应用引理3（注意P的定义），就可看出：$\{f_\xi:\xi\in A\}$（在$L^\infty\{0,1\}^{\omega_1}$中）等价于$l^1(\omega_1)$的常用基底。

证毕

定理6 在$MA(\omega_1)$之下，设X为一Banach空间。如果$L^1\{0,1\}^{\omega_1}$能同构嵌入X^*中，则$l^1(\omega_1)$能同构嵌入X中。

证明 （1）设$T: L^1\{0,1\}^{\omega_1}\to X^*$
为一同构嵌入。则对偶算子

$$T^*: X^{**}\to L^\infty\{0,1\}^{\omega_1}$$

是到上的。故由开映射定理可知，存在$k>0$能使：

$$S[L^\infty\{0,1\}^{\omega_1}]\subseteq T^*(kS[X^{**}]).$$

又由引理2知，$S[X]$在$S[X^{**}]$中是弱*稠密的，所以
$T^*(kS[X])$在$S[L^\infty\{0,1\}^{\omega_1}]$中是弱*稠密的。

（2）现在证明：存在$\{x_\xi:\xi<\omega_1\}\subseteq kS_X$及$\{\eta_\xi:\xi<\omega_1\}\subseteq\omega_1$能使：

$$\text{对每一}\xi<\omega_1,\ \int T^*(x_\xi)\pi_{\eta_\xi}d\mu>\frac{1}{2}.$$

并且　若$\xi<\zeta<\omega_1$，则$\int T^*(x_\xi)\pi_{\eta_\zeta}d\mu=0$。
其中μ为$\{0,1\}^{\omega_1}$上的Haar测度，而$\pi_\eta:\{0,1\}^{\omega_1}\to\{0,1\}$为向第$\eta$个坐标的射影（$\eta<\omega_1$）。

我们归纳地证明。设$\zeta<\omega_1$，并设对于诸$\xi<\zeta$已经有了适合条件的x_ξ及η_ξ。

首先，易见有

$$|\{\eta<\omega_1: \text{存在}\xi<\zeta\text{使}\int T^*(x_\xi)\pi_\eta d\mu\neq 0\}|<\omega_1.$$

所以，存在$\eta_\zeta<\omega_1$能使：

$$\text{对一切}\xi<\zeta,\ \text{都有}\int T^*(x_\xi)\pi_{\eta_\zeta}d\mu=0.$$

又由$T^*(kS[X])$在$S[L^\infty\{0,1\}^{\omega_1}]$中的弱*稠密性可知，存在$x_\zeta\in kS[X]$能使：

$$\int T^*(x_\zeta)\pi_{\eta_\zeta}d\mu>\frac{1}{2}.$$

（3）由（2）可知，对任何$\xi<\zeta<\omega_1$，都有

$$\|T^*(x_\xi)-T^*(x_\zeta)\|_1 \geqslant |T^*(x_\xi)(\pi_{\eta_\zeta})-T^*(x_\zeta)(\pi_{\eta_\zeta})| = \frac{1}{2}.$$

故可引用定理 5 而得ω_1的一个不可数子集A能使$\{T^*(x_\xi):\xi\in A\}$等价于$l^1(\omega_1)$的常用基底。再由$l^1(\omega_1)$的提升性质即可知$\{x_\xi:\xi\in A\}$也等价于$l^1(\omega_1)$的常用基底。　　　　证毕

§3　预备知识（二）

定义　设K为一紧致Hausdorff拓扑空间。以$C(K)$记K上全体实值连续函数f以$\sup\limits_{x\in K}|f(x)|$为范数所构成的Banach空间。以$M(K)$记$K$上全体有限实值正规（regular）Borel测度μ以$\|\mu\|=|\mu|(K)$（其中$|\mu|$为μ的全变差）为范数所构成的Banach空间。

引理7　$C(K)$的对偶空间$C(K)^*$等度同构于$M(K)$。（通过同构映射$T:M(K)\ni\mu\to T(\mu)\in C(K)^*$，其中$T(\mu)(f)=\int f d\mu$）。

证明可参看〔7〕第265页定理 3。

定义　设测度$\lambda\in M(K)$，令

$\mathrm{supp}(\lambda)=\{x\in K:$对每个含$x$的开集$U$都有$\lambda(U)>0\}$，

称为λ的**支撑**。当$\mathrm{supp}(\lambda)=K$时，称λ为K上的**严格正测度**。

定义　设μ为K上的非负测度。根据Radon-Nikodym定理，我们可以把$L^1(\mu)$等同于$M(K)$中一切对于μ绝对连续的测度λ所构成的子Banach空间。此时，$L^1(\mu)$中与λ对应的元素h，也即适合

对K中每一Borel子集A都有$\lambda(A)=\int_A h d\mu$

者，称为λ对于μ的**Radon-Nikodym导数**，记作$h=d\lambda/d\mu$。

定义　设K，L为紧致Hausdorff拓扑空间，$f:K\to L$为一连续映射，$\mu\in M(K)$。以$f_*(\mu)$记$M(L)$中如下定义的测度：

$(f_*(\mu))(B)=\mu(f^{-1}(B))$，（$B\subseteq L$，$B$为Borel 集）。

引理8　设$(K_i,\ \pi_{ij},\ \mu_i)_{i,j\in I}$为诸紧致拓扑空间$K_i$的一个

反向系统，具有连续且到上的连接映射 $\pi_{ij}: K_i \to K_j (i, j \in I; i > j)$，并且适合 $\pi_{ij}(\mu_i) = \mu_j (i > j)$，其中每个 μ_i 为 K_i 上的概率正规 Borel 测度。令 K 为此系统的反向极限，则在 K 上存在概率正规测度 μ 能适合 $\pi_{i*}(\mu) = \mu_i$（对每一 $i \in I$），其中 $\pi_i: K \to K_i$ 为自然射影。

证明可参看〔8〕第191页定理4.4.3。

定义 设 K，L 为紧致Hausdorff拓扑空间，f 为由 K 到 L 上的连续函数。如果对 K 的每个真闭子集 F（即闭子集 $F \neq K$），都有 $f(F) \neq L$，则称 f 为**不可约的**。

引理9 设 K 为一紧致度量空间，μ 为 K 上一个正规Borel概率测度，L 为一紧致拓扑空间，$f: K \to L$ 为一到 L 上的连续函数，能使对每个 $y \in L$ 都有 $f_*(\mu)\{y\} = 0$。那么，对每一 $\varepsilon > 0$ 都存在 K 的一个闭子集 M 能使：$\mu(M) \geqslant 1-\varepsilon$；$\mu | M$ 为一严格正测度；并且 $f | M$ 为一不可约函数。

证明 （1）任意给定 $\varepsilon > 0$。在 K 中选开集的一组可数基 $\{B_n : n < \omega\}$。我们以下归纳地定义两个序列 M_n，$U_n (1 \leqslant n < \omega)$ 使适合：

（a）M_n 为 K 的闭子集。

（b）U_n 为 K 的开子集。

（c）$M_1 = \mathrm{supp}(\mu)$。

（d）若 $M_n \cap B_n \neq \phi$，则

$$\mu(M_n \cap B_n \cap f^{-1}(U_n)) > 0,$$

并且
$$\mu(f^{-1}(U_n)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n},$$

并且
$$\mu(f^{-1}(U_n)) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2^k}\mu(M_k \cap B_k \cap f^{-1}(U_k)) : k < n,\ M_k \cap B_k \neq \phi\right\},$$

并且 $M_{n+1}=\operatorname{supp}(\mu|(M_n\cap\bar{B}_n)\cup(M_n\setminus f^{-1}(U_n)))$。

（2）设 M_n 已经定义，据此定义 U_n 及 M_{n+1} 如下：

（2.1）当 $M_n\cap B_n=\phi$ 时，令

$$U_n=\phi,\quad M_{n+1}=M_n.$$

（2.2）当 $M_n\cap B_n\neq\phi$ 时：任意取定一个 $x_n\in M_n\cap B_n$。由题设有 $f_*(\mu)\{f(x_n)\}=0$，故由测度 $f_*(\mu)$ 的正规性知存在 L 中的开集 U_n 能使 $f(x_n)\in U_n$，并且

$$\mu(f^{-1}(U_n))\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n},$$

并且 $$\mu(f^{-1}(U_n))\leqslant\min\left\{\frac{1}{2^k}\mu(M_k\cap B_k\cap f^{-1}(U_k)):k<n,\ M_k\cap B_k\neq\phi\right\},$$

并且 $\mu(M_n\cap B_n\cap f^{-1}(U_n))>0$。

再令 $M_{n+1}=\operatorname{supp}(\mu|(M_n\cap\bar{B}_n)\cup(M_n\setminus f^{-1}(U_n)))$。

归纳定义至此完成，易见（a）至（d）都适合。

（3）令 $M=\bigcap\limits_{1\leqslant n<\omega}M_n$。

显然 M 是 K 的闭子集，此外，对每个 n 都有

$$\mu(M_n)\geqslant1-\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

故有 $\mu(M)\geqslant1-\varepsilon$。

另外，注意有下列性质：若 $1\leqslant k<n<\omega$，则

$$\begin{aligned}&\mu(M_n\cap B_n\cap f^{-1}(U_n))\\ &\geqslant\left(1-\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)\mu(M_k\cap B_k\cap f^{-1}(U_k))\\ &\geqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}\right)\mu(M_k\cap B_k\cap f^{-1}(U_k)).\end{aligned}\qquad(1)$$

（4）令 V 为 K 中任一个适合 $M\cap V\neq\phi$ 的开集，则存在 $k<$

ω使

$$\overline{B}_k \subseteq V \text{ 且 } M \cap B_k \neq \phi.$$

于是$M_k \cap B_k \neq \phi$，从而由M_k，U_k的性质（d）有

$$\mu(M_k \cap B_k \cap f^{-1}(U_k)) > 0.$$

又由（i）可知，当$n > k$时有

$$\mu(M_n \cap B_k \cap f^{-1}(U_k)) \geqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)\mu(M_k \cap B_k \cap f^{-1}(U_k)).$$

故知
$$\mu(M \cap B_k \cap f^{-1}(U_k)) \geqslant \frac{1}{2}\mu(M_k \cap B_k \cap f^{-1}(U_k)) > 0 \tag{ii}$$

由（ii）式可知$\mu(M \cap V) > 0$。所以$\mu | M$为严格正测度.

由（ii）式又可知$f(M \cap B_k) \cap U_k \neq \phi$，从而

$$f(M \setminus V) \subsetneqq f(M).$$

所以$f | M$为不可约函数. 证毕

§4 在CH下构作Pz的反例

以下将利用CH构作一个拓扑空间K（Kunen-Haydon-Talagrand反例），并指出：$L^1\{0, 1\}^{\omega_1}$能同构嵌入$C(K)^*$中，但$l^1(\omega_1)$不能同构嵌入$C(K)$中。这样，在CH之下，$C(K)$就是Pelczynski猜想在$\alpha = \omega_1$时的一个反例。

拓扑空间K除了以上的作用外，还能充当一些其他有关Banach空间的猜想的反例（例如Hagler-Stegall猜想，它也是独立于ZFC的，不在此介绍.）.读者可参看〔4〕第1086-1087页的介绍及所引诸文献.

拓扑空间K的定义

（Ⅰ）对每一序数$\alpha < \omega_1$，令

$$A_\alpha = \{0, 1, -1\}^\alpha \times \{0\}^{\omega_1 \setminus \alpha} (\subseteq \{0, 1, -1\}^{\omega_1}),$$

并以P_α: $\{0, 1, -1\}^{\omega_1}\to A_\alpha$记自然射影。

取定一个1-1且到上的映射$\tau:\omega_1\to\omega_1\times\omega_1$使适合

若$\tau(\alpha)=(\beta, \gamma)$，则$\beta\leqslant\alpha$。

（易知τ存在。）

对任何α, β, m之适合$\omega\leqslant\alpha<\omega_1$, $\beta<\omega_1$, $m<\omega$者，我们将定义K_α, μ_α, $G_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$, f_α, $H_{\alpha m}$, $C_{\alpha m}$, B_α, C_α, D_α, M_α, N_α使适合下列诸条件：

(A·1) K_α是A_α的闭子集。

(A·2) μ_α是K_α上的Borel正规概率测度。

(A·3) 当$\beta<\alpha$时，$K_\beta\subseteq K_\alpha$，$K_\beta=P_\beta(K_\alpha)$，$\mu_\beta=P_{\beta*}(\mu_\alpha)$。

(A·4) 当$x\in K_\alpha$时，$\mu_\alpha\{x\}=0$。

(B·1) $\{G_{\alpha\beta}:\beta<\omega_1\}$是$K_\alpha$中一切Borel μ_α-零的子集族的一个良序，使得：

(B·2) $G_{\alpha 0}$是K_α的一个可数稠密子集。

(B·3) $\{D_{\alpha\beta}:\beta<\omega_1\}$是$K_\alpha$中一切适合$\mu_\alpha(D_{\alpha\beta})>0$的闭子集族的一个良序。

(C·1) B_α是K_α的闭子集。

(C·2) $P_\gamma(B_\alpha)\cap G_{\gamma\delta}=\phi$，（对任何$\omega\leqslant\gamma\leqslant\alpha$, $\delta\leqslant\alpha$）。

(C·3) $\mu_\alpha(B_\alpha)\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$，其中$n$是适合$\alpha+1=\lambda+n$（$\lambda$为极限序数，$n<\omega$）的唯一正整数。

(C·4) $\mu_\alpha|B_\alpha$为严格正测度。

(C·5) P_ω在B_α上不可约。

(D·1) $f_\alpha=dP_{\omega*}(\mu_\alpha|B_\alpha)/d\mu_\omega\in L^1(\mu_\omega)$。

(D·2) 对每一$m<\omega$，$H_{\alpha m}$是$P_\omega(B_\alpha)$中的闭集。

(D·3) 对每一$m<\omega$，$\mu_\omega|H_{\alpha m}$为严格正测度。

(D·4) 对每一$m<\omega$，$f_\alpha|H_{\alpha m}\geqslant\dfrac{1}{m}$。

(D·5) $\bigcup_{m<\omega} H_{\alpha m}$在$P_\omega(B_\alpha)$中稠密。

(D·6) 对每一$m<\omega$，$C_{\alpha m}$是$H_{\alpha m}$的可数稠密子集。

(D·7) 对任何$\omega\leqslant\gamma<\alpha$及$m<\omega$，$P_\omega(B_\alpha)\cap C_{\gamma m}=\phi$。

(E·1) B_α是两个不相交的闭集C_α，D_α之并。

(E·2) $\mu_\alpha(D_\alpha)>0$，$D_\alpha\subseteq P_\gamma^{-1}(D_{\tau(\alpha)})\cap K_\alpha$，

其中$\tau(\alpha)=(\gamma,\ \delta)$。

(E·3) $M_\alpha=\{(x|\alpha,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots):x\in C_\alpha\}$，

$N_\alpha=\{(x|\alpha,\ -1,\ 0,\ 0,\ \cdots):x\in D_\alpha\}$。

(F·1) $K_\omega=A_\omega$。

(F·2) $\mu_\omega=K_\omega$上的标准（canonical）Haar测度。

(F·3) 若$\alpha=\beta+1$，则$K_\alpha=K_\beta\cup M_\beta\cup N_\beta$。

(F·4) 若$\alpha=\beta+1$，则

$$\mu_\alpha=\mu_\beta|(K_\beta\setminus B_\beta)+\frac{1}{2}\mu_\beta|B_\beta+\varphi_{\beta*}\left(\frac{1}{2}\mu_\beta|C_\beta\right)+\phi_{\beta*}\left(\frac{1}{2}\mu_\beta|D_\beta\right),$$

其中$\varphi_\beta:C_\beta\to M_\beta$及$\phi_\beta:D_\beta\to N_\beta$分别为如下的同胚映射：

$$\varphi_\beta(x)=(x|\beta,1,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

$$\phi_\beta(x)=(x|\beta,\ -1,\ 0,\ 0,\ \cdots)\ .$$

(F·5) 若α为适合$\omega<\alpha<\omega_1$的极限序数，则K_α为$\bigcup_{\beta<\alpha}K_\beta$在$A_\alpha$中的闭包。

(F·6) 若α为适合$\omega<\alpha<\omega_1$的极限序数，则μ_α为$\{\mu_\beta:\beta<\alpha\}$在$M(K_\alpha)$中的弱＊极限。

（Ⅱ）这些对象可以超限归纳地定义如下。

对于$\alpha=\omega$，由（F·1）及（F·2）可得K_ω及μ_ω。

当$\omega<\alpha<\omega_1$时，由（F·3）至（F·6）可以定义K_α及μ_α（设对一切小于α的序数β已经定义了有关的诸对象）

此时，易见（A·1）至（A·4）都适合。

再利用连续统假设CH，由（$B\cdot1$）至（$B\cdot3$）可以定义诸$G_{\alpha\beta}$及$D_{\alpha\beta}$（因：有关的子集个数有连续统个，由CH即成为ω_1个，故可用足码$\beta<\omega_1$来走遍.）。

现在，选K_α的一个闭子集B_α^1使适合：

$$P_\gamma(B_\alpha^1)\cap G_{\gamma\delta}=\phi;\ \text{当}\omega\leqslant\gamma\leqslant\alpha,\ \delta\leqslant\alpha.$$

$$P_\omega(B_\alpha^1)\cap C_{\gamma m}=\phi;\ \text{当}\omega\leqslant\gamma<\alpha,\ m<\omega.$$

$$\mu_\alpha(B_\alpha^1)\geqslant1-\frac{1}{n^2};\ \text{对}(C\cdot3)\text{中的}n.$$

$$\mu_\alpha(B_\alpha^1\cap P_\gamma^{-1}(D_{\tau(\alpha)}))>0;\ \text{当}\tau(\alpha)=(\gamma,\ \delta).$$

这种选择是可能的，因为可数并

$$\bigcup_{\substack{\omega\leqslant\gamma\leqslant\alpha\\ \delta\leqslant\alpha}}P_\gamma^{-1}(G_{\gamma\delta})\cup\bigcup_{\substack{\omega\leqslant\gamma<\alpha\\ m<\omega}}P_\gamma^{-1}(C_{\gamma m})\cap K_\alpha$$

是K_α中的Borel μ_α-零集，μ_α是Borel正规概率测度，并且

$$\mu_\alpha(P_\gamma^{-1}(D_{\tau(\alpha)}\cap K_\alpha))>0.$$

然后，利用引理9，可以找到B_α^1的两个不相交的闭子集C_α，D_α使得：令$B_\alpha=C_\alpha\cup D_\alpha$，则（$C\cdot1$）至（$C\cdot5$），（$D\cdot7$），（$E\cdot1$）及（$E\cdot2$）都适合。

注意测度$P_{\omega*}(\mu_\alpha|B_\alpha)$对于$\mu_\omega$为绝对连续（因为事实上$P_{\omega*}(\mu_\alpha|B_\alpha)\leqslant\mu_\omega$.）令$f_\alpha$为（$D\cdot1$）中的Radon-Nikodym导数。然后就不难定义诸$H_{\alpha m}$及$C_{\alpha m}$使适合（$D\cdot2$）至（$D\cdot6$）。

然后，依（$E\cdot3$）定义M_α及N_α。

诸对象的归纳定义至此完成。

最后，令K为$\bigcup_{\alpha<\omega_1}K_\alpha$在$\{0,1,-1\}^{\omega_1}$中的闭包。

（K的定义完）

定理10 在CH之下，设K为上述定义的拓扑空间.则$L^1\{0,1\}^{\omega_1}$能同构嵌入$C(K)^*$中，但$l^1(\omega_1)$不能同构嵌入$C(K)$中。

这个定理的证明方法是常规的，为节约篇幅在此略去。读者可参看〔4〕第1092-1097页的有关论证。

另外，关于在CH之下对P_2的原始反例，可以参看〔2〕。

参 考 文 献

〔1〕A.Pelczynski, Studia Math., 30(1968), 231-246.

〔2〕R.Haydon, Israel Jour. Math., 7(1978), 142-152.

〔3〕S.Argyros, Trans. Amer. Math. Soc., 270(1982), 193-216.

〔4〕S.Negrepontis, in Handbook of Set-theoretic Topology, Vol.2, 1045-1142, North-Holland Publ.Co., 1984.

〔5〕Th.Jech, Set Theory, Academic Press, 1978.

〔6〕K.Kunen, Set Theory, North-Holland Publ.Co., 1980.

〔7〕N.Dunford and J.T.Schwartz, Linear Operators, Part 1, Interscience Publishers, 1958.

〔8〕R.B.Ash, Real Analysis and Probability, Academic Press, 1972.

第十章　Kaplansky问题的独立性

Kaplansky问题是指I.Kaplansky于1948年左右在一次讲演中提出的一个关于Banach代数的问题，叙述如下.

以K记复数域. 设X为一紧致Hausdorff空间，以$C(X, K)$记X上一切复值连续函数所构成的（域K上的）线性结合代数，以$|\cdot|_X$记$C(X,K)$上的一致范数，即$|f|_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. (注意，每一$f \in C(X, K)$都在$X$上有界，所以$|f|_X$存在.) Kaplansky问：是否$C(X,K)$上的每一范数都等价于一致范数$|\cdot|_X$?

他并在[1]中给出下列的部分结果：

定理　设X为一紧致Hausdorff空间，$\|\cdot\|$为$C(X,K)$上的任一范数，则有$|f|_X \leqslant \|f\|$，$(f \in C(X,K))$.

（证明略去，见[1]或[2]定理1·2）

据此，再利用开映射定理易知，在$C(X,K)$上存在不等价范数的充分必要条件是：在$C(X,K)$上存在不完备的范数. 从而又易知，Kaplansky问题等价于下列形式：

设X为一紧致Hausdorff空间，是否存在由Banach代数$C(X, K)$（指以$|\cdot|_X$为范数的）到（K上的）某一Banach代数A中的不连续同态映射？

对于这一问题，H.G.Dales和J.Esterle于1976年证明了在连续统假设（CH）之下的肯定性答案（见以下定理9）. 而W.H.Woodin和R.Solovay也于1976年利用公理集合论中的迭代力迫方法证明了：存在ZFC + MA(ω_1)的模型，在其中Kaplansky问题有否定的答案（见以下定理24）. 这样，就证明了这一问题相对于ZFC的独立性.

本章以下的介绍是根据〔2〕。

§1 预备知识(一)及CH下的肯定答案

以K记复数域，以R记实数域。我们将考虑域K或R上的线性结合代数，以下简称为代数（有时指明为复代数或实代数）。

设A为一复代数。一个由A到K（后者也依自然方式看作复代数）上的非零同态映射φ称为A的一个**特征标**（character）。以Φ_A记A的一切特征标所构成的集合，称为A的**特征标空间**。

设A为一可换代数。如果A的理想I能使商代数有(非0的)乘法单位元，则称I为一模度（modular）理想。A的所有极大模度理想的交仍是A的理想，称为A的(Jacobson)**根**，记为$\mathrm{rad}A$。如果A没有极大模度理想，则令$\mathrm{rad}A=A$，此时称A为一**根代数**（依此定义，我们所说的根代数都是可换代数。）。如果$\mathrm{rad}A=\{0\}$，则称代数A为**半单纯**的。

以$\mathrm{nil}A$记A中一切幂零元所构成的集合。当A为可换时，$\mathrm{nil}A$是A的一个理想（称为A的幂零根），并且易见$\mathrm{nil}A\subseteq\mathrm{rad}A$。

设A为一Banach代数（其范数一般记为$\|\cdot\|$），并设$\varphi\in\Phi_A$。则可证φ是一连续函数，并且$\|\varphi\|\leqslant1$。另外，如果A是一个可换且有单位元的Banach代数，则Φ_A是一个非空的紧致空间(对于A的对偶空间的相对$*$弱拓扑而言)。

设X为一拓扑空间。以$C(X,K)$记X上一切复值连续函数所成的集合。则$C(X,K)$对于通常的函数加法、乘法及数乘构成一个复代数，以常函数1为单位元。类似地，以$C(X)$记X上一切实值连续函数所成的实代数。

对X上的每一有界函数f，令$|f|_X=\sup\{|f(x)|:x\in X\}$。

若X为紧致Hausdorff空间（本章只考虑Hausdorff空间，以下常略去此字样），则$(C(X,K),|\cdot|_X)$是一个可换的有单位元的

Banach代数。

设$f\in C(X,K)$。令$\bar{f}(x)=\overline{f(x)}(x\in X)$（其中$\overline{f(x)}$为$f(x)$的共轭复数），则$\bar{f}\in C(X,K)$。设$A$为$C(X,K)$的子代数，如果$A$对于取共轭函数封闭（即，若$f\in A$则$\bar{f}\in A$），则称$A$为**自伴随的**（self-adjoiont）。

引理1 设A为$C(X,K)$的一个闭的自伴随子代数，并且$1\in A$，则A等度同构于一个形如$C(Y,K)$的Banach代数，其中Y为一紧致空间。

证明略去，见〔3〕

设$f\in C(X,K)$。令$Z(f)=f^{-1}(\{0\})$，称为f的零点集。

设I为$C(X,K)$的理想，令

$$h(I)=\bigcap\{Z(f):f\in I\},$$

易见$h(I)$是X中的闭集，称为I的壳（hull）。

设F为X中的闭集，令

$$I(F)=\{f\in C(X,K):Z(f)\supseteq F\},$$

并令 $$J(F)=\{f\in C(X,K):Z(f)\text{是}F\text{的一个邻域}\}.$$

易见：$I(F)$是$C(X,K)$的理想，并且是以F为壳的极大理想。$I(F)$是闭集。$J(F)$也是$C(X,K)$的理想，并且是以F为壳的极小理想。并且$J(F)$在$I(F)$中稠密。

设$x\in X$，我们把$J(\{x\})$简记为J_x，把$I(\{x\})$简记为M_x。易见，$\{M_x:x\in X\}$是由$C(X,K)$的全部极大理想所成的族。

当考虑实代数$C(X)$时，我们也以$I(F)$，$J(F)$，J_x，M_x记相应的集合。

以N记正整数集。以$l^\infty(K)$记一切有界复值无限序列(α_n)所成的集合，并令$|\alpha|_N=\sup\{|\alpha_n|:n\in N\}$，$(\alpha\overset{\text{def}}{=}(\alpha_n)\in l^\infty(K))$。则$(l^\infty(K),|\cdot|_N)$是一个有单位元的可换复Banach代数。类似地，以l^∞记一切有界实值无限序列依相应的范数$|\cdot|_N$所成的实Banach代数。

我们暂时把$(l^\infty(K), \|\cdot\|_N)$的特征标空间简记为$\Phi$.

对每一$n\in N$及$\alpha=(\alpha_n)\in l^\infty(K)$，令$\varepsilon_n(\alpha)=\alpha_n$，则易见$\varepsilon_n$: $l^\infty(K)\to K$是$l^\infty(K)$的一个特征标，即$\varepsilon_n\in\Phi$.

对每一$\alpha\in l^\infty(K)$及每一$\varphi\in\Phi$，令$\hat{\alpha}(\varphi)=\varphi(\alpha)$，则易知$\hat{\alpha}:\Phi\to K$为一连续函数，即$\hat{\alpha}\in C(\Phi,K)$.

利用Gelfand-Naimark定理（参见[3]）可以证明下列事实：

（i）映射$n\to\varepsilon_n$是由N到Φ中的同胚映射，并且N在Φ中的象集是稠密的。

（ii）映射$\alpha\to\hat{\alpha}$是由$l^\infty(K)$到$C(\Phi,K)$上的等度同构映射。

由上可知，Φ可以看作N的Stone-Čech紧致化βN. 因而，我们将把$l^\infty(K)$等同于$C(\beta N,K)$. 例如，若$p\in\beta N$，则把M_p看作$l^\infty(K)$的一个极大理想。

类似地，我们可以把l^∞等同于$C(\beta N)$.

设$\sigma\subseteq N$，以χ_σ记σ的特征函数. 易见，σ在βN中的闭包$\bar{\sigma}=\{p\in\beta N:\hat{\chi}_\sigma(p)=1\}$. 从而可知，如果$\{\sigma, \tau\}$是$N$的一个划分(partition)，则$\{\bar{\sigma}, \bar{\tau}\}$就是$\beta N$的一个划分，并且$\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$都是开闭集. 又可知，对于$\sigma,\tau\subseteq N$有$\overline{\sigma\cap\tau}=\bar{\sigma}\cap\bar{\tau}$. 还有，对每个$p\in\beta N$，$\{\bar{\sigma}:\sigma\subseteq N, p\in\bar{\sigma}\}$是$p$在$\beta N$中的一个由开闭集组成的邻域基.这一邻域基的存在，说明βN是一个完全不连通（totally disconnected）空间。

另外，不难证明（见[3]），对每个$p\in\beta N$，J_p都是$l^\infty(K)$的素理想。

我们以$c_0(K)$记一切收敛于0的复数序列所成的集合. 显见$c_0(K)$是$l^\infty(K)$的理想. 通过以上的等同化，可知$c_0(K)$已被等同于$C(\beta N,K)$的理想$I(\beta N\setminus N)$.

类似地，以c_0记一切收敛于0的实数序列所成的集合。

我们以$c_{00}(K)$记一切只含有限个非0项的复数无限序列所成的集合. 它也是$l^\infty(K)$的理想。

类似地，以 c_{00} 记一切只含有限个非 0 项的实数无限序列所成的集合。

引理7 设A，B为(同一域上的)Banach代数，θ为一个由A到B中的同态映射。如果A中的两个序列(a_n)与(b_n)适合$a_m b_n = 0 (m \neq n)$，则存在一常数C能使$\|\theta(a_n b_n)\| \leqslant C\|a_n\| \|b_n\|$，$(n \in N)$。

证明 显然不妨设$\|a_n\| = \|b_n\| = 1$ $(n \in N)$。

（1）假若引理的结论不真，则易见可以对每一$(i,j) \in N \times N$选一个$n(i,j) \in N$使适合

（i）$(i,j) \to n(i,j)$是由$N \times N$到N中的单射，并且

（ii）$\|\theta(u_{ij} v_{ij})\| \geqslant 4^{i+j}$，$((i,j) \in N \times N)$。其中$u_{ij} = a_{n(i,j)}$，$v_{ij} = b_{n(i,j)}$。

（2）令 $f_i = \sum_{l=1}^{\infty} v_{il}/2^l$，$(i \in N)$。

则每个$f_i \in A$。

对每个$i \in N$，再取$j(i) \in N$使$\|\theta(f_i)\| \leqslant 2^{j(i)}$，并令

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kj(k)}/2^k,$$

则$g \in A$。

（3）对每个$i \in N$，由以上定义及题设有

$$gf_i = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_{kj(k)} v_{il}/2^{k+l} = u_{ij(i)} v_{ij(i)}/2^{i+j(i)}$$

再由（ii）可得

$$\|\theta(gf_i)\| \geqslant 4^{i+j(i)}/2^{i+j(i)} = 2^{i+j(i)}.$$

另一方面，由（2）又有

$$\|\theta(gf_i)\| \leqslant \|\theta(g)\| \|\theta(f_i)\| \leqslant 2^{j(i)} \|\theta(g)\|.$$

对比以上二式得$\|\theta(g)\| \geqslant 2^i$。但$i \in N$为任意，此显然不可能。

证毕

设X为一紧致空间，$x \in X$。以下以N_x记x的一切开邻域所成的族。若U为X中的开集，令$K_U = I(X \setminus U)$。

设θ为由$C(X,K)$到一个Banach代数中的同态映射，x为X中一点。如果对每个$U \in N_x$，$\theta | K_U$都不连续，则称x为θ的一个

奇异点。θ的所有奇异点所成的集称为θ的**奇异集**。

设$x\in X$。一个由$C(X,K)$的极大理想M_x到一个可换 Banach代数的根中的非零同态映射称为一个**在x处的根同态**。

引理3 设X为一紧致空间，$x\in X$。并设θ为由M_x到一个可换Banach代数A中的非零同态映射。则：θ为（在x处的）根同态当且只当$\theta|J_x=0$。

证明 （1）若θ为根同态，则$\theta(M_x)\subseteq \mathrm{rad}A$。任取$f\in J_x$，则存在$g\in M_x$适合$fg=f$，从而$\theta(f)\theta(g)=\theta(f)$，所以$\theta(f)=0$。

（2）反之，设$\theta|J_x=0$。任取$\varphi\in\Phi_A$，则$\varphi\circ\theta\in\Phi_{M_x}\cup\{0\}$，从而$(\varphi\circ\theta)|J_x=0$。又由于$J_x$在$M_x$中稠密，故知$\varphi\circ\theta=0$，从而$\theta(M_x)\subseteq\ker\varphi$。所以$\theta(M_x)\subseteq\mathrm{rad}A$。 证毕

引理4 设X为一紧致空间，$x\in X$。则：在x处存在根同态当且只当对M_x/J_x可赋以拟范数。

证明易见，略去。（注：拟范数即把范数定义中的“$a\neq0$时$\|a\|>0$”减弱为“$a\neq0$时$\|a\|\geqslant0$”者。）

引理5 设X为一正则（regular）空间，F为X的无限子集。则存在$x_n\in F$及$U_n\in N_{x_n}(n\in N)$能使：当$m\neq n$时$U_m\cap U_n$为空集。

证明 任取F中二点$x\neq y$，则存在$U\in N_x$及$V\in N_y$使$x\notin\overline{V}$，$y\notin\overline{U}$并且$U\cup V=X$。显然在$U\cap F$及$V\cap F$中至少有一为无限集。所以：存在$x_1\in F$及一开集W_1能使$x_1\notin\overline{W}_1$且$W_1\cap F$为无限集。

再考虑无限集$W_1\cap F$，仿上知：存在$x_2\in W_1\cap F$及一开集W_2能使$x_2\notin\overline{W}_2$且$W_1\cap W_2\cap F$为无限集。

如此继续，可得诸$x_n\in F$及开集$W_n(n\in N)$使：$x_n\in W_1\cap\cdots\cap W_{n-1}\cap F$，$x_n\notin\overline{W}_n$并且$W_1\cap\cdots\cap W_n\cap F$为无限集。

最后，令$U_1=X\setminus\overline{W}_1$，$U_2=W_1\setminus\overline{W}_2,\cdots,U_n=(W_1\cap\cdots\cap W_{n-1})\setminus\overline{W}_n,\cdots$即可。 证毕

引理6 设X为一紧致空间，A为一 Banach 代数，$\theta:C(X,$

$K)\to A$为一同态映射，I为$C(X,K)$的一个形状为K_U或$K_U\cap J_x$的理想。

（i）如果$\theta|I$不连续，则对每一$n\in N$都存在$g_n\in I$能使$\|\theta(g_n^2)\|>n|g_n|_X^2$。

（ii）如果$\theta|I\neq 0$，则存在$g\in I$能使$\theta(g^2)\neq 0$。

证明 （1）证（i）。假若存在一常数k能使

$$(*)\qquad \|\theta(g^2)\|\leqslant k|g|_X^2,\ (g\in I).$$

对任何$f\in I$，易见f可表示为$f=f_1-f_2+i(f_3-f_4)$，其中诸$f_j\in I$并且适合$f_j(X)\subseteq[0,\ |f|_X]$，$(j=1,\cdots,4)$。另外，易见存在诸$g_j\in I$使$g_j^2=f_j(j=1,\cdots,4)$。再由(*)可得$\|\theta(f_j)\|\leqslant k|f_j|_X$，$(j=1,\cdots,4)$。从而有$\|\theta(f)\|\leqslant 4k|f|_X$。这与$\theta|I$不连续的题设矛盾。

所以，不存在常数k能使(*)成立。从而（i）的结论成立。

（2）仿上可证明（ii）成立。 证毕

定理7（Bade-Curtis） 设X为一紧致空间，θ为由$C(X,K)$到一个Banach代数A中的同态映射，F为θ的奇异集，则：

（i）当且只当θ为连续时，F为空集。

（ii）F为有限集。

（iii）若θ不连续且$F=\{x_1,\cdots,x_n\}$，则存在连续的同态映射$\mu:C(X,K)\to A$及n个线性映射$\nu_1,\cdots,\nu_n:C(X,K)\to A$能使

$$\theta=\mu+\nu_1+\cdots+\nu_n,$$

并且每个$\nu_i|M_{x_i}$是一个在x_i处的根同态$(i=1,\cdots,n)$。

证明 （1）证（i）。若θ为连续，显见F为空集。

反之，设F为空集。则对每个$x\in X$，都存在$U_x\in M_x$能使$\theta|K_{U_x}$为连续。再由X为紧致即易见存在X的有限开复盖V能使：对每一$U\in V$，$\theta|K_U$都连续。由此即易知θ为连续。

（2）证(ii)。假若F为无限，则由引理5知存在一个无限序列$(x_n)\subseteq F$及$U_n\in N_{x_n}$能使$U_m\cap U_n$为空集（对N中一切$m\neq n$）。

再由奇异集F的定义及引理6可知，对每个$n\in N$，存在$f_n\in K_{U_n}$能使

$$\|\theta(f_n^2)\|>n|f_n|_X^2$$

但由于对N中一切$m\neq n$有$f_mf_n=0$，这与引理2矛盾。

（3）为证(iii)，先证明：对任何$x\in F$，存在$U_x\in N_x$能使$\theta|(K_{U_x}\cap J_x)$为连续。

假若不然，则易见可归纳地选取$V_1,V_2,V_3,\cdots\in N_x$及$f_1,f_2,f_3,\cdots\in J_x$使得：对每一$n\in N$，

$$f_n\in K_{V_n},\ f_i(V_{n+1})=\{0\}\ (i=1,\cdots,n)，并且$$

$$\|\theta(f_n^2)\|>n|f_n|_X^2.$$

由于易见$f_mf_n=0$ $(m\neq n)$，这又与引理2矛盾。

（4）由（3）易知$\theta|J(F)$为连续，所以存在常数k能使

$$\|\theta(f)\|\leqslant k|f|_X.\ (f\in J(F)).$$

对于$i=1,\cdots,n$，取$W_i\in N_{x_i}$使适合$W_i\cap W_j=$空集$(i\neq j)$，(易见诸W_i存在)。并取$e_i\in K_{W_i}$使适合

$$|e_i|_X=1并且在x_i某一邻域上e_i=1.$$

令B为$C(X,K)$中一切如下的函数f所成的集：

$$f-f(x_i)1\in J_{x_i}\ (i=1,\cdots,n).$$

则易见B是$C(X,K)$的一个稠密子代数。

对任何$f\in B$，$f-\sum_{i=1}^{n}f(x_i)e_i\in J(F)$，从而有

$$\|\theta(f)\|\leqslant k\left|f-\sum_{i=1}^{n}f(x_i)e_i\right|_X+\left\|\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\theta(e_i)\right\|$$

$$\leqslant\left[(n+1)k+\sum_{i=1}^{n}\|\theta(e_i)\|\right]|f|_X.$$

所以θ在B上连续。

（5）令μ为$\theta|B$到$C(X,K)$上的连续拓展，(由B为$C(X,K)$的稠密子代数知μ存在)，并令$\nu=\theta-\mu$。则易知$\mu:C(X,K)\to A$是一个连续的同态映射，并且$\nu|J(F)=0$。

（6）任取$f\in I(F)$及$g\in J(F)$，则

$$\theta(f)\mu(g)=\theta(fg)=\mu(fg)=\mu(f)\mu(g),$$

从而$\nu(f)\mu(g)=0$。

由于μ为连续且$\overline{J(F)}=I(F)$，故知

$$\nu(f)\mu(g)=0\ \ (f,g\in I(F))。$$

所以，对任何$f,g\in I(F)$都有

$$\begin{aligned}\nu(fg)&=\theta(f)\theta(g)-\mu(f)\mu(g)\\&=(\mu(f)+\nu(f))(\mu(g)+\nu(g))-\mu(f)\mu(g)\\&=\nu(f)\nu(g),\end{aligned}$$

即$\nu|I(F)$为同态映射。

（7）现在定义$\nu_1,\cdots,\nu_n:C(X,K)\to A$为：

$$\nu_i(f)=\nu(fe_i),\ (f\in C(X,K);\ i=1,\cdots,n)。$$

则易见诸ν_i均为线性映射。

由于$1-(e_1+\cdots+e_n)\in J(F)$，故由（5）可知$\nu=\nu_1+\cdots+\nu_n$，从而有

$$\theta=\mu+\nu_1+\cdots+\nu_n。$$

（8）再证每个$\nu_i|M_{x_i}$为根同态（$i=1,\cdots,n$）。

任取$f,g\in M_{x_i}$，则fe_i，$ge_i\in I(F)$，从而由（6）有

$$\nu(fe_i)\nu(ge_i)=\nu(fge_i^2)。$$

又因$e_i^2-e_i\in J(F)$，再由（5）可知$\nu(fge_i^2)=\nu(fge_i)$。所以

$$\nu_i(f)\nu_i(g)=\nu_i(fg),$$

即$\nu_i:M_{x_i}\to A$为同态映射。

若$f\in J_{x_i}$，则$fe_i\in J(F)$，从而由（5）有$\nu(fe_i)=0$，即$\nu_i(f)=0$。所以$\nu_i|M_{x_i}$为根同态。 证毕

定理8 设X为一紧致空间。如果存在由$C(X,K)$到一个Banach代数A中的不连续同态映射，则存在一个$p\in\beta N\setminus N$，一个根Banach代数D及一个非零同态映射$\theta:c_0(K)\to D$能使$J_p\cap c_0(K)\subseteq\ker(\theta)$。

证明 （1）设$\lambda:C(X,K)\to A$是一个不连续的同态映射。

则易知存在一无限序列$(f_n)\subseteq C(X,K)$，其中每个$|f_n|_X=1$，而$\|\lambda(f_n)\|\to\infty$。

令B为$C(X,K)$中包含诸f_n及$\bar{f}_n(n\in N)$的最小的有单位元的闭子代数，则B是$C(X,K)$的一个闭的可分（separable）自伴随子代数。从而由引理1知B等度同构于一个代数$C(Y,K)$，其中Y为一紧致空间。又由B为可分知Y是可度量化的。并且$\lambda|B$显然仍是不连续的。

（2）由（1）及定理7可知，存在一个奇异点$x\in Y$，一个根Barach代数D及一个非零同态映射$\nu: M_x\to D$适合$\nu|J_x=0$。显然x不是Y的孤立点。令$X_0=Y\setminus\{x\}$。

令$(U_n)(n\in N)$为X_0的一系列开集，适合$U_m\cap U_n=$空集$(m\neq n)$（由引理5知(U_n)存在）。并令

$$S=\{n\in N: \nu|K_{U_n}\neq 0\}.$$

对每一$n\in S$，由引理6知存在$g_n\in K_{U_n}$能使$\nu(g_n^2)\neq 0$。又因$K_{U_n}\cap J_x$在K_{U_n}中稠密并且$\nu|J_x=0$，故不妨设$\|\nu(g_n^2)\|>n|g_n|_Y^2$。

又由于当$m\neq n$时有$g_m g_n=0$，故由引理2可知S为有限集。

（3）令d为一个定义Y上拓扑的度量（由（1）知d存在），并取$(x_n)\subseteq X_0$使适合

$$4\delta_{n+1}<\delta_n(n\in N)\text{且}\delta_n\to 0,$$

其中$\delta_n=d(x,x_n)$。

令　$V_n=\left\{y\in X_0: \frac{1}{2}\delta_n<d(y,x)<2\delta_n\right\},(n\in N)$

则诸V_n为非空开集，并且当$m\neq n$时$V_m\cap V_n$为空集。

由上段易知，我们不妨设已改取(x_n)的一个子序列作为新的(x_n)，并相应改取新的诸V_n使适合$\nu|K_V=0$，其中$V=\cup\{V_n: n\in N\}$。

（4）对每个$n\in N$，令

$$F_n=\left\{y\in X_0: 2\delta_{n+1}\leqslant d(y,x)\leqslant\frac{1}{2}\delta_n\right\}.$$

假若这些F_n除有限个外都是空集，则由V及诸V_n的定义可知$V\cup\{x\}$是x在Y中的一个邻域。因而，对任何$f\in M_x$，都存在$f_1\in J_x$及$f_2\in K_V$适合$f=f_1+f_2$，从而由$\nu|J_x=0$及$\nu|K_V=0$有$\nu(f)=0$。但这与（2）中ν的取法矛盾，所以诸F_n中有无限多个不是空集。

通过过渡到一个无限子序列及改变记号，我们又不妨设每个F_n都不是空集$(n\in N)$。令$F=\{x\}\cup(\cup F_n)$，则由诸F_n定义可知F是Y中的闭集。

（5）对每一$n\in N$，取$e_n\in J_x$使适合

$$|e_n|_Y=1,\ e_n(F_n)=\{1\},\ \text{以及}$$
$$e_n(y)=0\text{当}d(x,y)<\delta_{n+1}\text{或}d(x,y)>\delta_n.$$

并对每个$\alpha=(\alpha_n)\in c_0(K)$令

$$\phi(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n.$$

对每个$y\in X_0$，易见存在$W\in N_y$能使除n的两个值外都有$e_n(W)=\{0\}$，从而可知$\phi(\alpha)$在X_0上连续。

又显见$\phi(\alpha)\in M_x$，并且$\nu\circ\phi: c_0(K)\to D$为一线性映射。

对每一$y\in X_0\setminus V$及每一$n\in N$，由e_n取法知$e_n(y)\in\{0,1\}$，所以$e_n^2-e_n\in K_V$，从而由（3）有

$$\nu(e_n^2-e_n)=0,\ (n\in N).$$

又易见$e_m e_n=0$，$(m\neq n)$。从而可知$\nu\circ\phi$为同态映射。

又由于$\phi(c_{00}(K))\subseteq J_x\subseteq\ker\nu$，所以$(\nu\circ\phi)c_{00}(K)=0$。

（6）再证$\nu\circ\phi: c_0(K)\to D$是非零的。

取$g\in M_x$使$\nu(g)\neq0$，(由(2)知g存在)。并令$\beta_n=|g||g|_{F_n}$，$(n\in N)$。则$(\beta_n)\in c_0$。

再取诸$\alpha_n>0$使$\alpha=(\alpha_n)\in c_0$且$(\beta_n/\alpha_n)\in c_0$。并定义$f: F\to K$

如下： $f(x)=0$；在F_n上，$f=g/a_n$，$(n\in N)$
易见f为连续函数。又因F是Y中的闭集，所以f可拓展为M_x上的连续函数。

由于在F上有$\phi(a)f=g$，所以$(\nu\circ\phi)(a)\nu(f)=\nu(g)\neq 0$，从而$(\nu\circ\phi)(a)\neq 0$。

（7）现在把$c_0(K)$看作$C(\beta N,K)$中的理想，并令

$$E=\{p\in\beta N:(\nu\circ\phi)|(K_U\cap c_0(K))\neq 0,\ (U\in N_p)\}$$

由$\nu\circ\phi\neq 0$知E不空。又由$(\nu\circ\phi)|c_{00}(K)=0$知$E\subseteq\beta N\setminus N$。

假若E为无限，则存在βN中一序列非空开集(U_n)能使$U_m\cap U_n$为空集$(m\neq n)$并且

$$(\nu\circ\phi)|(K_{U_n}\cap c_0(K))\neq 0,\ (n\in N).$$

再利用$(\nu\circ\phi)|c_{00}(K)=0$，可以仿（2）中论证而得到一个矛盾。所以$E$是有限集。

显见$(\nu\circ\phi)|(J(E)\cap c_0(K))=0$。

现在任取一个$p\in E$，并取$e\in C(\beta N,K)$使：在p的一个邻域上$e=1$，并且在$E\setminus\{p\}$的一个邻域上$e=0$。

利用此e，定义$\theta:c_0(K)\to D$如下

$$\theta(f)=(\nu\circ\phi)(fe),\ (f\in c_0(K)).$$

易见θ即合定理所求。 证毕

在以上基础上，并引用连续统假设，Dales于1976年证明了下列定理。与此基本同时，Esterle也独立地得到同样结果，但证法不同。

定理9(Dales-Esterle) 在CH之下，设X为一无限紧致Hausdorff空间，则存在由Banach代数$C(X,K)$（以$|\cdot|_X$为范数）到一个Banach代数A中的不连续同态映射。从而$C(X,K)$上存在与$|\cdot|_X$不等价的范数。

这个定理的证明较长，但除了在一些关键处用到CH之外，都是常规的数学论证，在此略去。读者可参看〔4〕（或〔5〕,〔6〕,〔7〕）。

§2 Woodin条件

定义 以N^N记一切正整数无限序列所成的集．设$f, g \in N^N$，令：

$f <_F g$当且只当：存在$n_0 \in N$使$n \geqslant n_0$时恒有$f(n) < g(n)$。

$f \ll_F g$当且只当：$n \to \infty$时有$g(n) - f(n) \to \infty$。

显见$<_F$和$\ll_F$都是 N^N 上的偏序（在本章中，偏序一般指严格偏序。）．

定义 设（$P, <$）与（$Q, <$）均为偏序集，π为由 P到Q中的映射．

（i）如果对任何$a, b \in P$，由$a \leqslant b$可得$\pi(a) \leqslant \pi(b)$，则称π为**保序的**。

(ii) 如果对任何$a, b \in P$，由$a < b$可得$\pi(a) < \pi(b)$，则称π**为单调上升的**．

(iii) 如果对任何$a, b \in P$，由 $a < b$可得$\pi(a) > \pi(b)$，则称π**为单调下降的**．

(iv) 如果π为单射，并且对任何 a，$b \in P$：$a \leqslant b$ 当且只当$\pi(a) \leqslant \pi(b)$，则称π为**一嵌入映射**．

（V）如果π为满射且为嵌入映射，则称π 为**一序同构映射**．

定义 设U是由N的一些子集所成的集合．如果U适合下列的条件（i）至（iii)，则称U为N上的一个**超滤子**．

（i）若$a, b \in U$，则$a \cap b \in U$。

(ii) 若$a \in U$且$a \subseteq b \subseteq N$，则$b \in U$。

(iii) 对任何$a \subseteq N$，在 a 及$N \setminus a$中恰有一个属于U．

设U为N上的超滤子．如果存在$n \in N$使

$$U = \{a \subseteq N : n \in a\},$$

则称U为N 上由$\{n\}$生成的**主超滤子**．否则称U为N上的**非主超滤**

子或自由超滤子.

定义 以 R^N 记一切实无限序列所成的集（可以依自然方式把它看作一个实代数）. 设U为N上的一个超滤子.对任何$f,g\in R^N$，令

$$f=_U g\text{当且只当}\{n\in N:f(n)=g(n)\}\in U,$$

$$f<_U g\text{当且只当}\{n\in N:f(n)<g(n)\}\in U.$$

易见$=_U$是R^N上的等价关系，故可用它把R^N的元分为等价类. 以$[f]$（或$[f]_U$）记f所在的等价类，并令

$$R^N/U=\{[f]:f\in R^N\}.$$

在R^N/U中作如下定义：

$$[f]+[g]=[f+g];\ [f][g]=[fg];\alpha[f]=[\alpha f],(\alpha\in R);$$

$$[f]<[g]\ (\text{或记为}[f]<_U[g])\ \text{当且只当}f<_U g.$$

易证以上诸定义的合理性（指：与各等价类中代表元的取法无关）. 并且易证：R^N/U是一个实代数，并且是一个实闭有序域. R^N/U称为R对于U的**超幂**.

仿此可定义有序集（N^N/U，$<_U$）.

由于l^∞和c_0都是R^N（看作实代数）的子代数，所以也可以仿上定义实代数l^∞/U及c_0/U，并依自然方式把它们看作R^N/U的子代数（注意，若$f\in l^\infty$而$g\in R^N$且适合$f=_U g$时，未必有$g\in l^\infty$，但此事无妨. 在c_0时也有类似情况.）. 又易见c_0/U可看作l^∞/U的理想.

设$p\in\beta N$，以U记与p相应的N上的超滤子（也即：把p看作Φ中的元，即由l^∞到R中的非零同态映射，而令

$$U=\{Z(\alpha):\alpha\in l^\infty\text{且}p(\alpha)=0\}.$$

易证U为N上的超滤子.）. 我们暂以M_p及J_p记实代数$C(\beta N)=l^\infty$中与p相应的理想. 任取$f\in C(\beta N)$，则易见：$f\in J_p$当且只当对某一$\sigma\in U$有$f|\sigma=0$. 从而，$f\in J_p$当且只当$f=_U 0$. 所以，l^∞/U（作为实代数）同构于$C(\beta N)/J_p$，我们把这两者等同起

来。又易知，$c_0/(J_p\cap c_0)$ 对应于c_0/U。

根据以上看法，我们可以由定理 8 得到下列的定理。

定理10 设X为一紧致空间。如果存在由$C(X,K)$到一个Banach代数A中的不连续同态映射，则存在N上一个非主超滤子U，一个根Banach代数D及一个由c_0/U到D中的非零同态映射。

定义 设$g\in N^N$适合$1\ll_F g$，(其中 1 为N上恒取值 1 的常函数)，令

$$\langle g\rangle=\{f\in N^N:1\ll_F f\ll_F g\}.$$

定义 设A为一根代数。对任何$a,b\in A\setminus\{0\}$，令

$$a\ll b\text{当且只当存在}c\in A\text{适合}a=bc.$$

定理11 设X为一紧致空间。如果存在由$C(X,K)$到一个Banach代数A中的不连续同态映射，则存在N^N中一个严格上升的函数g及N上的一个非主超滤子U，使$(\langle g\rangle/U,\ <_U)$能嵌入$(N^N,\ <_F)$中。

证明 （1）由定理10知，存在N上的非主超滤子U及一个根Banach代数D及一个非零同态映射$\theta:c_0/U\to D$。

（2）现在定义函数g。

取一个$a\in c_0/U$使适合$\theta(a)\neq 0$，不妨设$a>0$。再取$\alpha=(\alpha_n)\in c_0$使适合$[\alpha]=a$，不妨设对每个$n\in N$都有$0<\alpha_n<1$（必要时乘以正常数并在U中一个集合上改变相应的α_n即可）。现在取g为N^N中一个适合

$$g(n)\geqslant 2(n\in N)\text{并且当}n\to\infty\text{时}\frac{1}{g(n)^2}\log\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\to\infty$$

的函数。

（3）以下把$<_U$简记为$<$。我们将构作一个嵌入映射

$$\pi:\ (\langle g\rangle/U,<)\longrightarrow(N^N,\ <_F),$$

它是如下一些映射的乘积：

$$(\langle g\rangle/U,<)\xrightarrow{\nu}(c_0/U,\ \ll)\xrightarrow{\theta}(D\setminus nil D,\ll)$$

$$\xrightarrow{\tau}(N^N, <_F).$$

其中θ就是（1）中（作为到D中的映射）已给出的，易见它是单调上升的，以下定义ν及τ，它们都将是单调下降的。

（4）对任何$f\in\langle g\rangle$，令

$$\alpha^{f/g^2}=(\alpha_n{}^{f(n)/g(n)^2}),\ (n\in N).$$

由于每个$f(n)\geqslant 1$，故由（2）可知$\alpha^{f/g^2}\in c_0\setminus\{0\}$。

现在任取$[f]\in\langle g\rangle/U$，并令

$$\nu([f])=[\alpha^{f/g^2}],$$

则易见ν是良定义的（即：$\nu([f])$的值与代表元f的取法无关）。

如果在$\langle g\rangle/U$中有$[f_1]<[f_2]$，不妨设对每一$n\in N$都有$f_1(n)<f_2(n)\leqslant g(n)$。（必要时对$f_1$及$f_2$在$U$中一个集上的值作改变即可。）令

$$\beta_n=\alpha_n{}^{(f_2(n)-f_1(n))/g(n)^2},\ (n\in N).$$

再由（2）可知$(\beta_n)\in c_0$。又易见有$\nu([f_1])[(\beta_n)]=\nu([f_2])$，从而在$c_0/U$中有$\nu([f_2])\ll\nu([f_1])$。所以

$$\nu:(\langle g\rangle/U,<)\to(c_0/U,\ll)$$

是一个单调下降的映射。

（5）现在证明，$\theta\circ\nu$的值域被包括在$D\setminus\mathrm{nil}D$中。

任取$[f]\in\langle g\rangle/U$，并任取$k\in N$，令

$$\beta_n=\alpha_n{}^{1-(kf(n)/g(n)^2)},\ (n\in N).$$

则当n足够大时有$1-(kf(n)/g(n)^2)>\frac{1}{2}$，从而当$n$足够大时$\beta_n<\alpha_n^{1/2}$。所以$\beta=(\beta_n)\in c_0$。又有

$$\beta_n=\alpha_n{}^{kf(n)/g(n)^2}=\alpha_n,\ (n\in N).$$

所以$(\nu([f]))^k[\beta]=\alpha$，故知$((\theta\circ\nu)([f]))^k\neq 0$。

（6）以$\|\cdot\|$记D上的范数。对于$x\in D\setminus\mathrm{nil}D$，定义

$$\tau(x)(n)=\min\{k\in N: k\geqslant\|x^n\|^{-1}\},\ (n\in N),$$

则$\tau(x)\in N^N$.

如果在$D\setminus \mathrm{nil}D$中有$x\ll y$.设$x=yz$，其中$z\in \dot{D}$.则$z\notin \mathrm{nil}D$，并且

$$\|x^n\|^{-1}\geqslant\|y^n\|^{-1}\|z^n\|^{-1},\ (n\in N).$$

由于D为根代数，所以当$n\to\infty$时有$\|y^n\|^{-1}\to\infty$及$\|z^n\|^{-1}\to\infty$，从而当n足够大时有$\tau(x)(n)>\tau(y)(n)$，也即$\tau(y)<_F\tau(x)$.所以，

$$\tau:(D\setminus \mathrm{nil}D,\ll)\to(N^N,<_F)$$

也是一个单调下降的映射.

（7）最后，令$\pi=\tau\circ\theta\circ\nu$.则由以上可知$\pi$为单调上升的映射.又因$<$为$\langle g\rangle/U$上的全序，所以$\pi$是一个嵌入映射. 证毕

定理12(Woodin条件) 设X为一紧致空间.如果存在由$C(X,K)$到一个Banach代数A中的不连续同态映射，则存在N上的非主超滤子V及一个由$(\langle Z\rangle/V,<_V)$到$(N^N,<_F)$中的嵌入映射.其中$Z\in N^N$为N上的恒等函数：$Z(n)=n$，$(n\in N)$.

证明 设g及U分别为定理11所断言存在的N^N中的函数及N上的非主超滤子.

令$\sigma_n=g^{-1}(\{n\})$,则$\{\sigma_n:n\in N\}$是N的一个划分(partition).再令

$$V=\{\sigma\subseteq N:\bigcup_{n\in\sigma}\sigma_n\in U\}.$$

易见V为N上的滤子.对每个$\sigma\subseteq N$，又易见在$\sigma\in V$及$(N\setminus\sigma)\in V$中恰有一条成立.所以V是N上的超滤子.又由于$n\to\infty$时有$g(n)\to\infty$而每一σ_n为有限,故易见V是N上的非主超滤子.

任取$f\in\langle Z\rangle/V$，则当$n\to\infty$时有$f(n)\to\infty$及$n-f(n)\to\infty$.从而当$n\to\infty$时也有$(f\circ g)(n)\to\infty$及$g(n)-(f\circ g)(n)\to\infty$，所以$f\circ g\in\langle g\rangle$.由此可知,

$$(\langle Z\rangle/V,<_V)\ni[f]_V\to[f\circ g]_U\in(\langle g\rangle/U,<_U)$$

是一个单调上升的映射，从而又易知它是一个嵌入映射.再由定

理11即得本定理的结论。 证毕

§3 预备知识（二）

定义 设$(P,<)$为一偏序集，A，B是P的子集。如果对任何$p\in P$都存在$a\in A$能使$p\leqslant a$，则称A为P的一个**共尾子集**。P的诸共尾子集的基数中的最小者称为P的**共尾数**。类似地（把$\leqslant$改为$\geqslant$），可定义P的**共首子集**及**共首数**。

定义 设$(P,<)$为一偏序集，A,B是P的子集。以$A<B$表示：对每一$a\in A$及$b\in B$都有$a<b$。如果$c\in P$适合$A<\{c\}<B$，则称c把子集偶$\{A, B\}$**隔开**。

定义 设$(P,<)$为一偏序集，A,B是P的子集。如果$A\cup B$是全序集并且$A<B$，则称序偶$\langle A,B\rangle$为P中的一个**予隙**(pregap)。如果A的共尾数为κ而B的共首数为λ，则称予隙$\langle A,B\rangle$为一(κ,λ)-**予隙**。如果予隙$\langle A, B\rangle$不能被P中任何元隔开，则称$\langle A,B\rangle$为一**缝隙**(gap)。

定义 设$(P,<)$为一偏序集。如果对于$\kappa,\lambda\leqslant\omega$在$P$中没有$(\kappa, \lambda)$-缝隙，则称$P$为一$\eta_1$-**集**。

引理13 对每一$g\in N^N$之适合$1\ll_F g$者，$(\langle g\rangle,\ll_F)$是一个η_1一集。

证明 （1）设$\langle f_n,g_n:n\in N\rangle$是$(\langle g\rangle,\ll_F)$中的一个$(\omega,\omega)$-缝隙。

令$k_0=1$。并对每一$n\in N$取$k_n\in N$使适合$k_n>k_{n-1}$及

$$f_i(k)+2n\leqslant g_i(k),\ (i,j=1,\cdots,n;\ k\geqslant k_n).$$

再令

$$h(k)=\begin{cases}1, & \text{当}\ k=1,\cdots,k_1-1;\\ \max\{f_1(k),\cdots,f_n(k)\}+n, & \text{当}\ k=k_n,\cdots,k_{n+1}-1,(n\in N).\end{cases}$$

则h隔开$\langle f_n,g_n:n\in N\rangle$。所以$(\langle g\rangle, \ll_F)$中不存在$(\omega, \omega)$-

缝隙。

（2）仿（1）可证 $(\langle g\rangle, \ll_F)$中不存在其他情况的$(\kappa,\lambda)$-缝隙之$\kappa$，$\lambda\leqslant\omega$者。 证毕

定义 设（P，$<$）为一偏序集。如果 P 的每一非空子集 A 都包括一个可数的与A共尾且共首的子集A'，则称P为一α_1-集。如果存在一个序数σ能使$P=\bigcup_{\nu<\sigma}P_\nu$，其中每个$P_\nu$都是$\alpha_1$-集并且当$\nu_1<\nu_2<\sigma$时有$P_{\nu_1}\subseteq P_{\nu_2}$，则称$P$为一$\beta_1$-集。

引理14 设（P,$<$）为一全序的α_1-集，（Q,$<$）为一η_1-集。又设P_0为P的子集而$\pi_0: P_0\to Q$为一单调上升的映射。则π_0能扩张为一个单调上升映射$\pi: P\to Q$。

证明 （1）令

$F=\{(U,\varphi): P_0\subseteq U\subseteq P;\ \varphi: U\to Q$是单调上升映射并且$\pi_0\subseteq\varphi\}$。

在F中定义$\prec$如下：

$(U_1,\varphi_1)\prec(U_2,\varphi_2)$当且仅当：$U_1\subseteq U_2$并且$\varphi_1\subseteq\varphi_2$。

显然F不空（因$(P_0,\pi_0)\in F$），并且易见F中每一上升链都有上界。故由Zorn引理知（F,$\prec$）有一极大元，设为（V,π）。

以下证明$V=P$，从而π就是所求的映射。

（2）假若$V\neq P$。任取一元$a\in P\setminus V$。由P为α_1-集知存在P的可数子集P_1，P_2使：P_1为$\{x\in P: x<a\}$的共尾子集而P_2为$\{x\in P: a<x\}$的共首子集。

因而，$\pi(P_1)$与$\pi(P_2)$为Q的可数子集。并且易见$\pi(P_1)\cup\pi(P_2)$为全序集且$\pi(P_1)<\pi(P_2)$。再由Q为η_1-集可知，存在$b\in Q$适合$\pi(P_1)<\{b\}<\pi(P_2)$。

现在定义$\pi_1: V\cup\{a\}\to Q$为：

$$\pi_1(x)=\begin{cases}\pi(x)，& \text{当}x\in V;\\ b，& \text{当}x=a。\end{cases}$$

则易见（$V\cup\{a\}$，π_1）$\in F$并且它是（V，π）的真扩张。但这与（V,π）的极大性矛盾。 证毕

引理15 设 $(P,<)$ 为一全序的β_1-集，$(Q,<)$为一η_1-集。则存在由P到Q中的单调上升映射。

证明 由题设知P可表示为$P=\bigcup\limits_{\nu<\sigma}P_\nu$，其中$\{P_\nu:\nu<\sigma\}$为一上升链且每个$P_\nu$均为$\alpha_1$-集。

由引理14易知，可以归纳地定义一族映射

$$\pi_\nu: P_\nu\to Q,\ (\nu<\sigma)$$

使对任何$\mu<\nu<\sigma$，P_ν都是P_μ的扩张。

现在令$\pi=\bigcup\limits_{\nu<\sigma}\pi_\nu$，则$\pi$就是一个由$P$到$Q$中的单调上升映射。

证毕

定义 以R_1记一切如下的序列$x=\langle x_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$所成的集合。其中：每个$x_\alpha\in\{0,1\}$并且$\{\alpha:x_\alpha=0\}$是$\omega_1$的一个不含最大元的非空真子集。

对于R_1中不同的元$x=\langle x_\alpha\rangle$及$y=\langle y_\alpha\rangle$，令

$$\delta(x,y)=\inf\{\alpha:x_\alpha\neq y_\alpha\},$$

并定义：　　$x\prec y$当且只当$x_{\delta(x,y)}<y_{\delta(x,y)}$。

易见R_1对于$\prec$构成全序集。

定义 对每一$\sigma\leqslant\omega_1$，以Q_σ记一切如下的序列$x=\langle x_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$所成的集合：存在$\delta<\sigma$使$x_\delta=1$而对一切$\delta<\alpha<\omega_1$都有$x_\alpha=0$。

以Q记Q_{ω_1}。易见$Q=\bigcup\limits_{\sigma<\omega_1}Q_\sigma$，并且$Q\subseteq R_1$而$Q\neq R_1$。

定义 令$I=R_1\setminus Q$，并令

$J=\{x\in R_1:$不存在$\delta<\omega_1$使对一切$\delta<\alpha<\beta<\omega_1$有$x_\alpha=x_\beta\}$。易见$J\subseteq I$且$J\neq I$。

引理16 $(R_1,\prec)$中每一有上界的非空子集都有最小上界，每一有下界的非空子集都有最大下界。

证明 (1) 设S为$(R_1,\prec)$的非空子集且有上界。现在归纳地定义$x=\langle x_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$为：

$$x_\alpha=\max\{y_\alpha:y\in S,\ y|\alpha=x|\alpha\},$$

(1·1) 若$x\in R_1$，令$z=x$。则易见$z=\sup S$。

(1·2) 若$x\notin R_1$，则由R_1的定义知存在$\sigma<\omega_1$能使$x_\sigma=0$而对一切$\sigma<\xi<\omega_1$都有$x_\xi=1$。此时，令

$$z_\xi=\begin{cases}x_\xi, & \text{当}\xi<\sigma;\\ 1, & \text{当}\xi=\sigma;\\ 0, & \text{当}\sigma<\xi<\omega_1.\end{cases}$$

并令$z=\langle z_\xi:\xi<\omega_1\rangle$。则易见$z\in R_1$且$z=\sup S$。

(2) 仿(1)可证，对$(R_1, \prec)$的每一有下界的非空子集T，都存在$z\in R_1$适合$z=\inf T$。　　证毕

引理17　设$x\in I$，$A_x=\{y\in Q:y\prec x\}$，$B_x=\{y\in Q:x\prec y\}$。则：当$x\in J$时，$\langle A_x, B_x\rangle$是$(Q,\prec)$中的一个(ω_1, ω_1)-缝隙。当$x\in I\setminus J$时，$\langle A_x, B_x\rangle$是$(Q,\prec)$中的一个(ω, ω_1)-缝隙或(ω_1, ω)-缝隙。

证明　$\langle A_x, B_x\rangle$显然是$(Q,\prec)$中的一个缝隙，设为(κ,λ)-缝隙。

(1) 令$S=\{\xi<\omega_1:x_\xi=1\}$。则由$x\in I$知$S$非空且无最大元。

对每个$\xi\in S$，令

$$x_{\alpha\xi}=\begin{cases}a_\alpha, & \text{当}\alpha\leqslant\xi;\\ 0, & \text{当}\xi<\alpha<\omega_1.\end{cases}$$

并令$x^\xi=\langle x_{\alpha\xi}:\alpha<\omega_1\rangle$。则易见$\{x^\xi:\xi\in S\}$是$A_x$的共尾子集，并且$\kappa=|S|$。

(2) 令$T=\{\xi<\omega_1:x_\xi=0\}$。则由$x\in I$知$T$非空且无最大元。

对每个$\xi\in T$，令

$$y_{\alpha\xi}=\begin{cases}x_\alpha, & \text{当}\alpha<\xi;\\ 1, & \text{当}\alpha=\xi;\\ 0, & \text{当}\xi<\alpha<\omega_1.\end{cases}$$

并令$y^\xi=\langle y_{\alpha\xi}:\alpha<\omega_1\rangle$。则易见$\{y^\xi:\xi\in T\}$是$B_x$的共首子集，并且$\lambda=|T|$。

（3）当$x\in J$时，易见$\sup S=\sup T=\omega_1$，所以$\kappa=\lambda=\omega_1$。当$x\in I\setminus J$时，易见$\{\kappa,\ \lambda\}=\{\omega,\ \omega_1\}$。　证毕

引理18　对每一$\sigma<\omega_1$，$(Q_\sigma,\prec)$为一α_1-集。$(Q,\prec)$为β_1-集。

证明　（1）任取Q_σ的非空子集A。显然A在R_1中有上界。设$x=\langle x_\alpha\rangle$为$A$在$R_1$中的最小上界。

(1·1) 若$x\in A$，则$\{x\}$是A的共尾子集。

(1·2) 若$x\notin A$。令$\tau=\sup\{\alpha: x_\alpha=1\}$，则$\tau$为一极限序数且$\tau\leqslant\sigma$。

对每一$\xi<\tau$，易见存在$y^\xi\in A$适合$y^\xi|\xi=x|\xi$，所以$\{y^\xi:\xi<<\tau\}$是A的一个可数的共尾子集。

（2）仿上可知，也存在与A共首的可数子集。从而易见$(Q_\sigma,\prec)$是一α_1-集。

（3）由（2）及$Q=\bigcup\limits_{\sigma<\omega_1}Q_\sigma$即易见$Q$为$\beta_1$-集。　证毕

§4　存在适合$MA(\omega_1)$且具有否定答案的模型

定理19　在$MA(\omega_1)$之下，设$\langle f_\alpha,g_\beta:\alpha<\kappa,\ \beta<\lambda\rangle$为$(N^N,<_F)$中一个$(\kappa,\ \lambda)$-予隙，其中$\kappa.\lambda\leqslant\omega_1$。则存在两个函数$h_1$，$h_2\in N^N$能使：对每一$\alpha<\kappa$及每一$\beta<\lambda$，存在$k\in N$使得：对每个$j\geqslant k$，或$f_\alpha(j)\leqslant h_1(j)\leqslant g_\beta(j)$，或$f_\alpha(j)\leqslant h_2(j)\leqslant g_\beta(j)$。

证明　（1）令P为由诸三元组$p=\langle r,s,\sigma\rangle$所成的集，其中$r$，$s$，$\sigma$适合下列三条件：

(i) 存在$l(p)\in N$使$r,s\in N^{l(p)}$。

(ii) σ是$\kappa\times\lambda$的有限子集。

(iii) 对每一$(\alpha,\beta)\in\sigma$及每一$j>l(p)$，有$f_\alpha(j)<g_\beta(j)$。

对于P中任二元$p_1=\langle r_1,s_1,\sigma_1\rangle$及$p_2=\langle r_2,s_2,\sigma_2\rangle$，令$p_1\leqslant p_2$

当且仅当下列三条件成立：

(iv) $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$并且$l(p_1) \geq l(p_2)$。

(v) (r_1, s_1)是(r_2, s_2)的扩张。

(vi) 对每一$(\alpha, \beta) \in \sigma_2$及每一$j \in \{l(p_2+1), \cdots, l(p_1)\}$，或$r_1(j) \in [f_\alpha(j), g_\beta(j)]$，或$s_1(j) \in [f_\alpha(j), g_\beta(j)]$。

易见$(P, \leqslant)$是一偏序集（通常意义下的）。

（2）现在证$(P, \leqslant)$适合c.c.c.

设$p_1 = \langle r, s, \sigma_1 \rangle$，$p_2 = \langle r, s, \sigma_2 \rangle \in P$并且$l(p_1) = l(p_2)$。任取$m \in N$。我们断言：存在$p_3 \in P$适合$p_3 \leqslant p_1$，$p_3 \leqslant p_2$及$l(p_3) \geqslant m$。

令$\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$，并取$k \geqslant \max\{l(p_1), m\}$使得：对每一$(\alpha, \beta) \in \sigma_3$及每一$j > k$，都有$f_\alpha(j) < g_\beta(j)$（这是可能的，因对任何$\alpha < \kappa$及$\beta < \lambda$都有$f_\alpha <_F g_\beta$。）。又取$r^* \in N^k$使得：$r^*$是$r$的扩张并且对$j = l(p_1)+1, \cdots, k$及每一$(\alpha, \beta) \in \sigma_1$都有$r^*(j) \in [f_\alpha(j), g_\beta(j)]$（由$p_1$适合(iii)知此可能.）.再仿此取$s^* \in N^k$。现在令$p_3 = (r^*, s^*, \sigma_3)$，则易见$p_3$具有所需要的性质.

特知，P中任何两个形如$\langle r, s, \sigma_1 \rangle$及$\langle r, s, \sigma_2 \rangle$的元都相容。又由于$P$中的元$\langle r, s, \sigma \rangle$其$(r, s)$只有可数多种取法，故易见$(P, \leqslant)$适合c.c.c.。

（3）对任何$\alpha < \kappa$，$\beta < \lambda$及$k \in N$，令

$$D_{\alpha, \beta, k} = \{p = \langle r, s, \sigma \rangle \in P : (\alpha, \beta) \in \sigma,\ l(p) \geqslant k\}.$$

由（2）中的断言易见$D_{\alpha, \beta, k}$在$(P, \leqslant)$中稠密.

又易见$D_{\alpha, \beta, k}$至多有ω_1个，故由$MA(\omega_1)$知存在P中的滤子G能使每个$G \cap D_{\alpha, \beta, k}$不空.

（4）现在定义$h_1, h_2 \in N^N$如下：对每一$k \in N$，易见存在$q = \langle r, s, \sigma \rangle \in G$能使$l(q) \geqslant k$。任意取定一个这样的$q$，并令$h_1(k) = r(k)$，$h_2(k) = s(k)$。

由G的滤子性质及（1）中的(v)易知h_1及h_2的上述定义是合理的。

(5) 设$\alpha<\kappa$且$\beta<\lambda$. 取$q\in D_{\alpha\cdot\beta+1}\cap G$.

对每一$j\geqslant l(q)+1$, 易见存在$\bar{q}\in G$适合$\bar{q}\leqslant q$及$l(\bar{q})\geqslant j$. 故由(1)中的(vi)可知: 或$h_1(j)\in[f_\alpha(j), g_\beta(j)]$, 或$h_2(j)\in[f_\alpha(j), g_\beta(j)]$. 证毕

定理20 在$MA(\omega_1)$之下, 设$\langle A, B\rangle$为$(N^N,<_F)$中的一个(κ,λ)-予隙, 其中$\omega\leqslant\kappa,\lambda\leqslant\omega_1$, 并令$U$为$N$上一个非主超滤子. 则存在$h\in N^N$能使$A<_U\{h\}<_U B$.

证明 设$\langle A,B\rangle=\langle f_\alpha,g_\beta:\alpha<\kappa, \beta<\lambda\rangle$, 并取$h_1$, h_2为如定理19中所说的两个函数.我们证明下列断言:或$f_\alpha<_U h_1<_U g_\beta(\alpha<\kappa, \beta<\lambda)$; 或$f_\alpha<_U h_2<_U g_\beta(\alpha<\kappa, \beta<\lambda)$.

假若此断言不成立, 则在$\kappa\times\lambda$中存在(α_1, β_1)及(α_2, β_2)能使下列的(i)及(ii)都不成立: (i)$f_{\alpha_1}<_U h_1<_U g_{\beta_1}$; (ii)$f_{\alpha_2}<_U h_2<_U g_{\beta_2}$.

令$\gamma=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $\delta=\max\{\beta_1,\beta_2\}$, 则$f_\gamma<_U h_1<_U g_\delta$及$f_\gamma<_U h_2<_U g_\delta$都不成立.

由于$\kappa,\lambda\geqslant\omega$, 有$\gamma+1<\kappa$及$\delta+1<\lambda$.令

$$A=\{j\in N: f_{\gamma+1}(j)\leqslant h_1(j)\leqslant g_{\delta+1}(j)\},$$
$$B=\{j\in N: f_{\gamma+1}(j)\leqslant h_2(j)\leqslant g_{\delta+1}(j)\}.$$

由定理19可知$N\setminus(A\cup B)$有限, 故由U为非主超滤子易知$A\cup B\in U$. 从而A,B至少有一个在U中, 不妨设$A\in U$. 又由于$f_\gamma<_F f_{\gamma+1}$及$g_{\delta+1}<_F g_\delta$, 故由$A\in U$又易知$\{j\in N: f_\gamma(j)<h_1(j)<g_\delta(j)\}\in U$, 从而有

$$f_\gamma<_U h_1<_U g_\delta,$$

这与以上矛盾.

所以上述的断言成立. 因而定理成立. 证毕

定理21 在$MA(\omega_1)$之下, 若U为N上的非主超滤子, 则存在由$(R_1,\prec)$到$(\langle Z\rangle/U,<_U)$中的嵌入映射.

证明 (1) 由引理13知$(\langle Z\rangle,\ll_F)$为一η_1-集. 由引理18

知 $(Q,\prec)$ 为一β_1-集．故由引理15知存在一个单调上升映射π：$(Q,\prec)\rightarrow(\langle Z\rangle,\ll_F)$。从而，映射$\pi$：$(Q,\prec)\rightarrow(\langle Z\rangle,<_F)$也是单调上升的．

（2）对每一$x\in I(=R_1\setminus Q)$，令$\langle A_x,B_x\rangle$为$(Q,\prec)$中如下定义的缝隙：

$$A_x=\{y\in Q:y\prec x\},\ B_x=\{y\in Q:x\prec y\}.$$

由引理17知$\langle A_x,\ B_x\rangle$是$(Q,\prec)$中的一个(κ,λ)-缝隙，其中$\{\kappa,\ \lambda\}\subseteq\{\omega,\ \omega_1\}$。从而$\langle\pi(A_x),\ \pi(B_x)\rangle$是$(\langle Z\rangle,\ <_F)$中的一一个$(\kappa,\ \lambda)$-予隙。

由定理20知存在$h\in N^N$能使$\pi(A_x)<_U\{h\}<_U\pi(B_x)$。由于$\pi(B_x)$不空，所以$h\in\langle Z\rangle$．我们就取定这样一个$h$并定义$\pi(x)=h$。

（3）由于Q在R_1中稠密，故易知

$$\pi:(R_1,\prec)\rightarrow(\langle Z\rangle,<_U)$$

也是单调上升的．由π即可导出所需要的由$(R_1,\prec)$到$(\langle Z\rangle/U,<_U)$中的嵌入映射．　　证毕

由定理21及定理12(Woodin条件) 可得：

定理22　在$MA(\omega_1)$之下，设X为一紧致空间．如果存在由$C(X,K)$到一个Banach代数A中的不连续同态映射，则存在由$(R_1,\prec)$到$(N^N,<_F)$中的嵌入映射．

另外，利用公理集合论中的迭代力迫方法，可以证明下列定理：

定理23(Solovay-Woodin)（在ZFC不矛盾的前提下）存在$ZFC+MA(\omega_1)$的模型M，在其中不存在由$(R_1,\prec)$到$(N^N,<_F)$内的嵌入映射。

证明较长也较专门，略去．见〔2〕定理8.25。

由定理22及23就可得到本节的主要结果：

定理24　（在ZFC不矛盾的前提下）存在$ZFC+MA(\omega_1)$的模型M，在其中：对任何紧致空间X，由$C(X,K)$到任何（K上

的）Banach代数A中的同态映射都是连续的。

这个定理与定理 9 合起来，就说明了Kaplansky 问题相对于ZFC的独立性。

参 考 文 献

〔1〕 I. Kaplansky, Duke Math. Jour., 16(1949), 399-418.

〔2〕 H.G.Dales and W.H. Woodin, An Introduction to Independence for Analysts, Cambridge Univ. Press, 1987.

〔3〕 W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1973.

〔4〕 H.G.Dales, Amer. Jour. Math., 101(1979), 647-734.

〔5〕 J. R. Esterle, Proc. London Math. Soc., (3)36 (1978), 46-58.

〔6〕 J. R. Esterle, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 30(1977), 113-127.

〔7〕 J. R. Esterle, Proc. London Math. Soc., (3)36 (1978), 59-85.

附录　公理集合论发展简史

何　青

什么是集合？人们往往认为，集合就是把一些具有某种性质的对象聚集起来所成的总体。但这不能算是集合的定义。要想严格地定义集合这个概念是相当困难的。因此上述的说法仍不失为一种恰当的描述。由德国数学家康托（G.Cantor）所创立的集合论当初正是建立在这样一个描述性的基础之上的，因而也有朴素集合论之称。自康托创立集合论至今，已有近百年之久了，目前集合论已发展成为一个内容丰富的数学分支。尤其是自六十年代美国数学家科恩（P.J.Cohen）用力迫法（forcing method）解决了连续统假设的独立性问题后，集合论进入了一个深入发展的时期，产生了一系列深刻的结果，并影响到其他数学分支，引起了数学家们的广泛注意。下面对集合论的发展历史作一简要介绍。

§1　康托的朴素集合论

集合论是关于无穷集合的数学理论。人们对无穷的认识经历了很长的过程。早在中国古代和西方古希腊时期，数学家就已接触到了无穷过程和无穷小。但是否承认无穷集，却是一个从古代到中世纪一直引起争论的问题。亚里斯多得就只承认"潜无穷"（即一个无限的延伸过程）。甚至到了1831年，高斯还认为"把无穷量作为一个实在的整体来使用，这在数学中是绝对不允许的，无穷只不过是一种说话方式……"。1638年伽利略把全体自然数和全体实代数数一一对应起来，得出它们具有相同个数的结

论。然而它在当时被称为“伽利略悖论”。因为自亚里斯多得以来，“部分不能等于全体”是一条不容置疑的真理。甚至伽里略本人也认为，无穷量不可比较，无大小之分。其实，“部分可以等于全体”正是无穷集的基本特性。后来戴德金就以此作为无穷集的定义，并沿用至今。无穷集真正得到研究是上世纪后半期，康托首先对无穷集进行了深入的系统研究，创立了超穷序数、基数等新概念，并建立了一套有关的基本定理。

康托的研究是从证明“函数展开为三角级数的唯一性”开始的。他首先对无穷集进行分类。在1874年的论文《关于一切代数实数的一个性质》里提出了“一一对应”的分类准则。这一方法是认识上的一个飞跃。对无穷集来说，如果把能否一一对应作为是否相等的标准，则一个无穷集就会和它自己的真部分相等。这和有限集中“全体大于部分”相矛盾。这一事实恰好是有限集和无限集的本质区别。

康托还发现并非一切无穷集都可数，无穷集是有区别的。他首先证明了一个线段上的实数不可数。自从发现了两个不同的无穷集，自然数集和“连续统”以后，康托自然想到是否还有更大的无穷。经过几年努力，他发现了解答这个问题的两个途径：一是根据序数理论从序数集来形成更大的无穷，另一途径是用一个集合的幂集来形成比原集更大的无穷。

从第一条途径出发，康托构造了一系列序数ω，$\omega+1$，…，2ω，…，$\omega\cdot\omega$，…，ω_1，ω_2，ω_3，…；以及一系列基数$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2$，…。

从第二条途径出发，康托构造了一个比一个更大的集合和基数。如果a表示集合A的基数，则2^a表示A的幂集的基数。他用对角线方法证明了$2^a>a$，从而构造出一系列基数a，2^a，2^{2^a}，…。

通过这两种方法我们有了两个系列的基数：

第一系列：$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2$，…

第二系列：$\aleph_0$，$2^{\aleph_0}$，$2^{2^{\aleph_0}}$，…。

很自然的问题是比较这两个系列基数的大小。那么$2^{\aleph_0}$是否等于$\aleph_1$？这个问题康托没有解决，即使到了今天我们依然不知道答案。著名的连续统假设就是假设$2^{\aleph_0}=\aleph_1$，简记此假设为CH。

两个无穷集是否能比较大小，是集合论中的一个根本问题。任二良序集都能比较大小，因而，如果每一集合都能良序，则任二集合都能比较大小。如何使每个集合都能良序，康托没有解决。1904年策墨罗证明了著名的良序定理，但在证明中使用了一条重要的公理（选择公理）。关于选择公理的问题将在下面讨论。

§2　罗素悖论和公理集合论

康托集合论有一条重要的原则：把凡是满足某种性质$p(x)$的对象x聚集起来就构成一个集合，记作$\{x:p(x)\}$。这一原则被称为概括原则。它很自然，人们原来都深信不疑。1901年，罗素用具有性质$x\notin x$的元素x组成的集合$\{x:x\notin x\}$推出下述矛盾：记此集合为a，根据a的定义，由$a\in a$可推出$a\notin a$；同样，由$a\notin a$又可推出$a\in a$；因而，$a\in a$当且只当$a\notin a$。这就是著名的罗素悖论。罗素还曾以“理发师悖论”作比喻说明这一悖论。罗素悖论的出现立即震动了整个数学界，引起了数学史上的第三次危机。从此以后，数学家们对数学的绝对严格性的观念发生了动摇。

为了消除罗素悖论，不得不对集合的概念加以限制。由于当时希尔伯特刚为欧氏几何成功地建立了公理系统，因此大家认为采用公理化的方法对集合作一些必要的规定是适当的。于是一些集合论的公理系统应运而生。其中有代表性的是策墨罗(E.Zermlo)和弗兰克尔(A.Fraenkel)建立的ZFC系统，罗素建立的类型论，

冯·诺伊曼（von Neumann）、贝尔纳斯（P.Bernays）和哥德尔（K.Godel）建立的BG系统．其中应用最多的是ZFC系统，它的主要精神是有限制地使用概括原则，下面给出ZFC系统的公理．

（1）外延公理：如果两个集合具有完全相同的元素，则它们相等：

$$\forall A \forall B[\forall x(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B].$$

（2）空集公理：存在一个不包含任何元素的集合：

$$\exists A \forall x(x \notin A).$$

（3）配对公理：对于任何集合x，y，存在一集合恰以x, y为它的元素：

$$\forall x \forall y \exists A \forall z[z \in A \longleftrightarrow (z = x \vee z = y)].$$

（4）并集公理：对于任何集合A，存在一集合B，B恰以A的元素的元素为它的元素：

$$\forall A \exists B \forall x]x \in B \longleftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y)].$$

（5）幂集公理：对于任何集合A，存在一集合B，B恰以A的子集为它的元素：

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \longleftrightarrow x \subseteq A).$$

（6）子集公理：对于任何不含B的1阶公式φ（可能含t_1，…，t_k及x），对于任何集合t_1，…，t_k及C，存在一集合B，它由C中那些适合φ的元素组成：

$$\forall t_1 \cdots \forall t_k \forall C \exists B \forall x[x \in B \longleftrightarrow (x \in C \wedge \varphi(x, t_1, \cdots, t_k))].$$

（7）无穷公理：存在一个集合A，它含有无穷多个元素：

$$\exists A[\phi \in A \wedge \forall x(x \in A \rightarrow (x \cup \{x\}) \in A)].（\phi\text{为空集}）$$

（8）替换公理：对于任一集合A与任一不含B的1阶公式$\varphi(x, y)$，如果满足条件$(\forall x \in A) \forall y_1 \forall y_2[(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2]$，则存在一集合$B$，它恰由那些存在$x \in A$使得$\varphi(x, y)$成立的$y$组成：

$$\forall A\{(\forall x\in A)\forall y_1\forall y_2[(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2))\rightarrow y_1=y_2]$$
$$\rightarrow\exists B\forall y[y\in B\longleftrightarrow(\exists x\in A)\varphi(x,y)]\}$$

（9）正则公理：任何非空集A都含有一元素x，使得x与A没有公共元素：

$$\forall A[A\neq\phi\rightarrow\exists x(x\in A\wedge x\cap A=\phi)]。$$

（10）选择公理：如果F是一个由两两不相交的非空集合组成的集族，则可以从F的每个集合中各选出一个元素组成一个集合S：

$$\forall F[[\forall x\in F(x\neq\phi)\wedge(\forall x\in F)(\forall y\in F)(x\neq y\rightarrow x\cap y=\phi)]\rightarrow$$
$$\exists S[(\forall x\in F)(\exists!\ y)(y\in S\cap x)\wedge$$
$$(\forall x\in S)(\exists z\in F)(x\in z)]]。$$

一般把（1）至（9）所组成的系统称为ZF系统。

在ZFC系统中，子集公理就是一种受到限制的概括原则。用这条公理只能得到与已构造的集合相比并不大的集合。这样就有效地阻止了悖论的产生，并且也能够得出数学中所需要的东西。

但是，关于ZFC系统仍存在着一些基本问题有待解决。例如连续统假设，以及ZFC系统的和谐性。在ZFC系统中引起争议最多的公理就是选择公理。在ZFC系统中，使用其它公理所得到的集合都可以构造性地给出，唯有选择公理是一个例外。数学家们就是否承认选择公理的问题展开了激烈的争论，激烈的程度在数学史上也许只有关于欧氏几何的平行线公理的争论可以与之相比。

如果集族F所含的非空集是有限多个，那么存在S的事实是ZFC系统中其他公理的结论，无需选择公理。即使F是无穷族，但如果F中所含的每个集合都按某种统一的方式定义了良序，同样也可以不用选择公理。罗素曾给出一个简单的比喻：假定有无穷多双鞋，那么我们能从每一双里选出一只鞋，例如都取左脚的鞋。但如果是无穷多双袜子，则不用选择公理就无法选取了。其

主要原因是我们无法用概括原则去准确地描述用选择公理所选出的集合。正是由于这种非构造性的缺点，使选择公理受到许多非议，数学家们也尽可能地避免使用选择公理。

此外，有些由选择公理推出的结论也与直觉不符，这使人们感到它是一条危险的公理。其中最著名的是1924年巴拿赫（S.Banach）和塔斯基（A.Tarski）证明的被称为"分球怪论"的定理。这条定理说，利用选择公理可以把一只球分成有穷多份，然后再把它们重新组合成两只与原来的球一样大小的球。显然这与直觉大相径庭，因此人们称之为怪论。另外，和选择公理等价的良序定理也是一个很强的结论。它断言任何一个集合都存在良序，但实际上就是对实数集，也至今尚未找到它的一个具体的良序。又如，维他利（G.Vitali）用选择公理证明了存在勒贝格不可测的实数集，这个结论也不合数学家的口味。

但是，另一方面我们又很难放弃选择公理。事实上，若放弃它就得放弃一大部分现代数学。选择公理在数学中的应用非常多。例如，大家熟习的事实"可数多个可数集的并集是可数集"，其证明就需要选择公理。莱维（A.Lévy）最近证明了，若不用选择公理就不能证明上述结论。在各数学分支中还可举出很多重要定理与选择公理等价，或是需要用选择公理才能证明。例如佐恩（Zorn）引理，特尔基（Turkey）引理，拓扑中的乘法公理、吉洪诺夫（Tychonoff）定理，布尔代数中的斯通（Stone）表示定理、素理想定理，泛函中的乌列逊（Urysohn）引理、汉-巴拿赫（Hahn-Banach）扩张定理，等等。从这些定理的重要性可见选择公理在数学中的地位。

关于选择公理的争论非常激烈。直到哥德尔证明了选择公理与ZF系统的相对和谐性，这场斗论才初步平息下来。至于选择公理的独立性问题，迟至六十年代力迫法产生后才获得解决。

此外，由于选择公理过强，人们也提出了它的一些弱形式。

常用的弱形式有可数选择公理（AC_ω），依赖选择公理（DC_ω），良序选择公理（AC_{WO}）。它们的关系是$AC \to AC_{WO} \to DC_\omega \to AC_\omega$。反向的蕴涵都不成立。

虽然ZFC系统对集合进行了严格的描述，也排除了罗素悖论，但是否还会推出其它矛盾来，仍不得而知。庞加莱曾经形象地说过："为了防备狼，羊群已用篱笆围起来了，但却不知道圈里边是否还有狼。"为了解决ZFC系统的和谐性，希尔伯特曾设想把全部数学还原为有限主义的数学。所谓有限主义的数学，是指只研究具体的对象并只用构造主义的证明方法。希尔伯特希望用这种方法来证明全部数学的和谐性。但是哥德尔的不完备性定理彻底否定了这种想法。

§3　哥德尔的工作

1931年，哥德尔证明了著名的不完备性定理。这个定理说，任何包含数论的相容的形式系统都是不完备的，即存在这个系统内的语句，它和它的否定都不能在这个系统内证明。如果这个系统还包含皮亚诺算术，则这个系统的和谐性是不能用可在这个系统内形式化的方法证明的。不完备性定理表明，用ZFC系统本身不能证明ZFC的和谐性。

不过数学家一般都相信ZFC是和谐的，因为它的公理看来是合理的，而且至今从未推出矛盾。至于将来会不会推出矛盾，则完全是一个信念问题。

哥德尔不完备定理的证明，使用了现今被称为形式系统算术化的方法。这是在证明中运用了一些把形式系统纳入自身之中的充满技巧的方法，因而他所找到的既不能肯定、也不能否定的命题，是人为构造出来的。现在，数学家们把眼光集中到算术理论中的一些重要问题，希望从中找到不可判定的问题。最近组合数

学中的一条相当自然的定理，帕里斯-哈林顿(Paris-Harrington)定理被证明为皮亚诺算术系统中的不可判定命题，虽然它在较强的系统中是可以证明的。关于这方面的研究在数理逻辑中已形成一个新的分支。这里不再详细讨论。

哥德尔对集合论的一个重要贡献是1938年证明了选择公理和连续统假设与ZF的相对和谐性。这是一次突破性的工作，他使用的方法被称为内模型方法。哥德尔认为集合的概念太含混，因而无法判定选择公理和广义连续统假设的真假性。他用几个基本的集合运算在ZF中递归地构造了所谓的可构造集，全体可构造集（记为L）是集合全体（记为V）的一部分。他进而证明了，ZF的所有公理外加$V=L$在L中成立，即L是“$ZF+V=L$”的模型。在L中他还证明了AC和GCH（广义连续统假设），所以“ZF＋AC＋GCH”是相对和谐的。哥德尔的内模型方法以后被广泛用于集合论的相对和谐性证明中。到了七十年代，R.Jensen等人对可构造模型进行更精确的刻划，发展了“精细结构”的理论，从而在L中证明了许多组合命题。他将精细结构理论与大基数理论相结合证明了著名的复盖引理：假设0^{*}不存在，如果X是V中可数序数集，则存在一个可构造的序数集合Y使得$X\subseteq Y$并且$|X|=|Y|$。其中0^{*}不存在表示某种大基数不存在。后来，T.Dodd和Jensen等人将精细结构理论与超幂方法相结合，提出了柱心模型的理论，并且证明了相应的复盖引理。现在柱心模型的理论成为了集合论研究中的重要工具。

虽然内模型的方法解决了许多问题，但是连续统假设(CH)和选择公理（AC）的独立性问题依然没有解决。迟至六十年代，力迫法的产生才解决了这些问题。

§4 连续统假设和力迫法

连续统假设是康托在1883年提出的。自从1900年布尔伯特把它列为23个重大数学问题的第一个问题以来，曾有过两次重大突破，但并没有最终解决。

1938年哥德尔在证明ZF+AC的相对和谐性时，也证明了ZF+CH相对和谐，从而（在ZF和谐的假定下）由ZFC推不出¬CH。

1963年科恩用力迫法证明了ZFC+¬CH的相对和谐性，从而（在ZF和谐的假定下）由ZFC推不出CH。

以上两个结论合起来，就说明了（在ZF和谐的假定下）连续统假设对于ZFC的（相对）独立性。

力迫法使用了全新的思想和方法，技巧很复杂。以下作一些简略的直观解释。

ZFC系统的一个基本特点是它有多重模型。例如集合全体V是ZFC的模型，而可构造集类L也是ZFC的模型。在不同的模型中，基数是可以改变的，这就为我们证明¬CH提供了一个途径。

根据模型论的基本结论，如果ZFC有模型，可以假定它有一个可数可传模型M。科恩的想法是在M中加入一些新集合，把M扩张为一个新模型N，，使N成为ZFC+¬CH的模型。这就要求：首先，加入的新集合不会破坏M的结构，以保证N仍是ZFC的模型；其次，新集合应能使N中有ω_2个实数，从而$2^{\omega}\geqslant\omega_2$。为此，需根据这两个要求设计一个特殊的偏序集$P$。$G\subseteq P$被称为$M$上的兼纳集（generic set），如果它具有下列二性质：（1）G是P的滤子（filter）；（2）如果D是P的稠密子集且$D\in M$，则$G\cap D$不空。一般来说，G不是M中的元素。现在把M中的一

部分元素指定为P-名字，并用每个P-名字根据G按一定的法则构造一个N中的新元素．力迫法有一个基本定理说，对P的任一兼纳集G，这样构造的N仍然是ZFC的模型，并含有G为它的一个新元素．通常称N为M的扩张模型，并记为$M[G]$．在这种扩张中基数会发生变化．但如果P满足某些条件，例如可数反链条件，则$M[G]$可以保持某些基数不变．另一方面，P的成员常设为某一新集合a的近似物，P上的偏序则是近似程度强弱的刻划．兼纳集$G\subseteq P$常是a的近似逼近"序列"，它以a为"极限"，即$\cup G=a$．通过各种P的稠密子集可以对G加上许多限制，使得a满足我们的要求．一般地，G不在M中，而$\cup G$则在N中直接构造．

例如，我们想在$M[G]$中产生ω的一个M中没有的新子集a，只要考虑a的特征函数f：$n\in a$时$f(n)=1$，$n\notin a$时$f(n)=0$．在M中设计偏序集$P=\{p$：p为有穷函数，p的定义域是ω的子集，p的值域是$\{0,1\}\}$．显然P的元素是f的有穷逼近．如果p比q强，则p比q更逼近f，或者说，p比q包含f的更多信息．如果G是P的兼纳集，则$\cup G$是从ω到$\{0,1\}$中的函数．通过稠密子集的选取，可以保证G的定义域是ω．以G为特征函数的ω的子集是M中原来没有的，所以$M[G]$中ω的子集比M中多．科恩就是用这个办法逐次扩张模型使ω的子集不断增加，并且在模型扩张过程中基数保持不变．在最后的模型N中$2^{\omega}\geqslant\omega_2$，从而$\neg CH$在$N$中成立．

为了证明基数在N中不变，我们需要在M中讨论N的性质．或者说要在M这个世界中去研究另一个世界$M[G]$的事情．为此，科恩引进了"力迫"概念．定义"p力迫语句σ"为"对任一兼纳集$G\subseteq P$，只要$p\in G$，则σ在$M[G]$中真"．另一方面，科恩证明了"p力迫σ"这一性质在M中可以刻划，还不需要提到兼纳集$G\subseteq P$．由上面的定义可知，p力迫σ，就迫使σ在某些扩张模型中成立．由于p是$\cup G$的近似物，这意味着，当近似逼近$\cup G$」

p时，σ被迫成立．或者说p中所包含的信息已能保证σ成立．

力迫法是一种强有力的构造模型的方法，用它不但构造了$\neg CH$和$\neg AC$在其中成立的模型，还得到了大量独立性结果．例如集合论中的Suslin假设，Kurepa猜想，群论中的Whitehead问题，分析中的Kaplansky问题等，都已被证明是相对独立于ZFC的．

§5 大基数公理

集合论的另一个重要课题是大基数公理．ZFC的无穷公理保证了无穷基数的存在，其中最小的是ω．ω有三个明显的性质：（1）它不是后继基数．（2）它不是少于ω个更小基数的并集．（3）对所有小于ω的基数n，$2^n<\omega$．我们自然要问：除了ω以外，是否还有其他无穷基数也具有上述三条性质？如果假设存在这样的更大的无穷基数，将会产生什么情况？

出人意料的是，在ZFC中无法证明存在不可数的基数满足上述三条性质，同样也无法否定它．人们把满足性质（1）和（2）的不可数基数称为弱不可达基数，把满足（1）、（2）、（3）的不可数基数称为强不可达基数．如果假设GCH成立，那么强不可达基数和弱不可达基数是相同的．运用这些大基数假设，至今也没有推出与ZFC相矛盾的结果，因此我们把它们作为新公理加进ZFC中．

研究表明，弱不可达基数是一个大得惊人的基数．对于弱不可达基数ω_α，可以证明它必有性质$\omega_\alpha=\alpha$，但是具有这个性质的最小基数还不是弱不可达的．如果令$\lambda_0=\omega$，$\lambda_{n+1}=\omega_{\lambda_n}$，则$\lambda=\bigcup_{n\in\omega}\lambda_n$就具有上述性质．这个基数在直观上已是非常大了，但它不满足（2）因而λ还不是弱不可达基数．

通过对ω的性质加以推广，人们还逐步引进了各种其它的大基数，如Ramsey基数，Mahlo基数，0^*假设，Erdös基数，可测基

数，弱紧基数，强紧基数，超紧基数，巨大（huge）基数等．假设某种大基数存在的公理统称为大基数公理，也称为广义无穷公理．由于大基数公理的有关概念过于复杂，这里只介绍其中之一．

如果基数$\kappa>\omega$，并且在其幂集$P(\kappa)$上存在一个κ-可加的2值测度，则称κ为可测基数．可测基数比第1个强不可达基数还要大得多，这是因为集合$\{\lambda<\kappa: \lambda$是强不可达基数$\}$的势是$\kappa$．假定可测基数存在，则可以证明可构造公理不成立，甚至可以证明存在不可构造的自然数集．可测基数还有许多奇特的性质，例如上面提到的柱心模型理论，如果用K表示柱心模型并且假设不存在可测基数，则K满足复盖引理，即：对V中任何不可数的序数集合X都存在K中的集合Y使得$X\subseteq Y$而且$|X|=|Y|$．

大基数理论还有不少其他用途．在许多独立性问题的证明中都用到大基数假设．例如，在证明正规Moore空间猜想的过程中，就用到强紧基数．

各种大基数公理都有共同的缺点，它们对连续统假设无能为力．A．Levy和R．Solovay证明了：只要ZFC+“存在可测基数”相容，则连续统假设及其否命题都不能由之证明．

此外，各种大基数公理的相容性也都未能证明．现在，研究各种大基数的作用及它们之间的关系，以及大基数与其它集合论假设的相对相容性问题，已成为集合论的一个内容极其丰富的专题．

§6 决定性公理

由于选择公理对ZF的相对独立性，使数学家有了在ZF中引进与选择公理矛盾的新假设的余地．近年来引人注意的是在六十年代由J．Mycielski和H．Steinhaus提出的决定性公理（axiom of determinacy），简记为AD．

我们先看对策论中的一个问题。设$A\subseteq{}^{\omega}\omega$是一个由一些无穷长自然数序列组成的集合.用$G_A$表示与$A$相应的一个博奕(game)，规定如下：甲、乙二人轮流取ω中的元素，甲先取p_0，然后乙取p_1，然后甲取p_2，…。设最后所得的序列为$a=\langle p_0, p_1, p_2, \cdots\rangle$，如果$a\in A$则为甲胜，否则为乙胜。所谓甲的一个必胜策略是指甲的一个策略，每当轮到甲取数时，他可以根据双方已取的数运用此策略决定该取的数，使得无论乙每次如何取法，总能使最后所得的无限序列$a\in A$。仿此可定义乙的必胜策略。所谓G_A是决定的，是指甲、乙二人中有一人有必胜策略。决定性公理断言：对每个$A\subseteq{}^{\omega}\omega$，$G_A$都是决定的。

首先，选择公理和决定性公理是矛盾的.因为我们可以用选择公理找到一个集合$A\subseteq{}^{\omega}\omega$使得$G_A$不能决定。因此，如果要使用决定性公理，就必须舍弃选择公理。不过，AD与选择公理的弱形式DC（相依选择公理）并不矛盾。

其次，由ZF推不出AD（在ZF和谐的前提下）。这是因为，用AD可以证明连续统假设（由于没有选择公理，连续统假设的形式与前述的有所不同），从而由连续统假设对ZF的独立性即知由ZF推不出AD.但是,AD与ZF的和谐性问题至今仍未解决。如果对集合A加一些限制，可以得到一些较弱的决定性公理。例如，若A是开集，则可以在ZF中证明G_A是可决定的。如果增加一些大基数假设，就可以证明一些更强的结果。经常被讨论的较弱的决定性公理是射影决定性公理（PD)。最近有报导说，如果假设存在巨大基数，就可以证明PD，但有关的文章尚未发表。

决定性公理有许多重要的推论。例如，由它可证明每一实数集都是Lebesgue可测的，并且具有Baire性质。由它也可推出可数选择公理对实数集成立。等等。

决定性公理在大基数方面却有一些奇怪的结论。例如，1966年Solovay用AD证明了ω_1及ω_2是可测基数，但是当$n>2$时，ω_n都

是奇异的且具有共尾数ω_2。后来又证明了$\omega_{\omega+1}$及$\omega_{\omega+2}$也是可测基数，等等．决定性公理的研究不仅为ZFC系统的研究开辟了新领域，还给传统的描述集合论的研究注入了新的活力．

§7 马丁公理及其它假设

随着集合论研究的深化，人们又陆续提出一些很有意义的新假设，其中比较著名的是马丁公理（Martin Axiom，记为MA）．

在证明Souslin假设和谐性的过程中，马丁发现有一条命题起了本质的作用．他于1970年正式提出了这条命题，并命名为马丁公理．它的内容如下：设$\langle P, \leqslant\rangle$是一个非空偏序集，满足可数反链条件，$D$是$P$的一族稠密子集且$|D|<2^{\omega}$，则存在$P$的一个滤子$G$，它和$D$的每个元（$P$的稠密子集）的交不空（如果把$|D|<2^{\omega}$换为$|D|\leqslant\omega_1$，则相应的命题记为$MA(\omega_1)$）．

MA与CH之间的关系非常有趣。一方面，由CH可推出MA．另一方面，用MA也能证明许多用CH能证明的命题．不过，ZFC＋MA＋$\neg$CH是相对和谐的．如果CH不成立，则对于介于ω和2^{ω}之间的基数λ，用马丁公理可以得出许多有趣的结论．例如，用MA可以证明λ个Lebesgue可测实数集的并集仍可测．用MA＋$2^{\omega}>\omega_1$推出的结果表明在ω与2^{ω}之间的基数和ω有相似的性质．例如，若$\omega<\lambda<2^{\omega}$，则$2^{\lambda}=2^{\omega}$，由此可以推出$2^{\omega}$是正则基数．

又如，用MA可以证明，任何c.c.c.拓扑空间的乘积空间仍是c.c.c.的．

MA在代数中也有重要的应用．例如，由MA＋$\neg$CH可推出存在一个Whitehead群不是自由群，从而得到Whitehead问题的否定答案．马丁公理在分析和拓扑学中也有许多应用，特别是在集论拓扑学中应用很多．D. Fremlin曾写了一本书名为“马丁公理的推论”，其中收集了马丁公理的各种应用．

另一方面，如果我们减弱马丁公理中对偏序的要求，就可以得到更强的公理．例如正常力迫公理和极大马丁公理．不过这些公理的和谐性证明都需要用到大基数假设．

极大马丁公理是M．Foreman 在1984年提出的，他证明了极大马丁公理是马丁公理这种类型的公理中最强的一种．他还证明，由极大马丁公理可得出$2^{\omega}=\omega_2$，这个结论很出人意料．

研究这些新出现的集合论假设并把它们应用到其他数学领域中去，是目前集合论研究的一个特点．不过，这些假设被称为公理，是不很恰当的．只是由于讨论这些假设对集合论的研究很有意义，它们才受到人们的重视．它们缺少一般公理所具有的自明性，数学家们也没有意图把它们和ZFC的公理同等对待．